UE Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
KV Algebra und Diskrete Mathematik

6. Übungszettel, 30. April 2013

Lösungen

1. Zeigen Sie detailliert: Das homomorphe Bild einer zyklischen Gruppe ist wieder zyklisch.

   Lösung:
   Sei G zyklisch und von e erzeugt.
   Sei ferner $h : G \to H$ ein Homomorphismus in eine weitere Gruppe.
   Wir haben zu zeigen, dass $h(G)$ zyklisch ist, d.h. dass es ein $f \in h(G)$ gibt, welches $h(G)$ erzeugt.
   Wir zeigen, dass $h(e)$ eine geeignete Wahl ist:
   Wegen $e \in G$ ist $h(e) \in h(G)$.
   Wir zeigen nun, dass $h(e)$ die Gruppe $h(G)$ erzeugt.

   Sei $b \in h(G)$; dann gibt es $a \in G$ mit $h(a) = b$.
   Weil G von e erzeugt ist, gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass $a = e^n$.
   Nun verwenden wir, dass h ein Homomorphismus ist, und erhalten: $b = h(a) = h(e^n) = h(e)^n$.

   Wir haben also für ein beliebiges, und damit für alle, $b \in G$ gezeigt, dass es durch $h(e)$ erzeugt ist. Also erzeugt $h(e)$ die ganze Gruppe $h(G)$.

2. Wir betrachten die General Linear Group $G := \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

   (a) Bestimmen Sie das Zentrum von G.

   Lösung:
   Sei $A \in Z(G)$.
   Um zu sehen, was passiert, sehen wir uns zuerst den Fall $n = 2$ an. Dann gilt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} \end{pmatrix}$$

   aber

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12} & a_{12} \\ a_{21} + a_{22} & a_{22} \end{pmatrix}$$

   Wegen der Vertauschbarkeit müssen diese aber gleich sein, insbesondere $a_{11} = a_{11} + a_{12}$, woraus $a_{12} = 0$ folgt. Ebenso kann man $a_{21} = 0$ zeigen. Dann muss aber auch $a_{11} = a_{22}$ sein. Also ist A eine Skalarmatrix.
   Wir führen nun folgende Notation ein: Für eine Matrix M bezeichne $M_{i,j}$ deren Eintrag in Zeile i und Spalte j; und weiters $M_{i,}$ deren i-te Zeile sowie $M_{,j}$ deren j-te Spalte.
   Seien nun $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, mit $i \neq j$, und sei $E^{i,j}$ die Elementarmatrix vom Format $n \times n$ mit $(E^{i,j})_{i,j} = 1$. Bei Multiplikation von links (rechts) bewirkt sie die Addition der j-ten Zeile (der i-ten Spalte) zur i-ten Zeile (zur j-ten Spalte). Also

$$(E^{i,j}A)_{i,} = A_{i,} + A_{j,} \qquad (AE^{i,j})_{,i} = A_{,i}$$
$$(E^{i,j}A)_{j,} = A_{j,} \qquad (AE^{i,j})_{,j} = A_{,i} + A_{,j}$$

Es gilt $E^{i,j} \in G$. Weil A im Zentrum liegt, muss daher gelten: $E^{i,j}A = AE^{i,j}$
Wir betrachten diese Gleichung an der Stelle (i,i). Es gelten

$$(E^{i,j}A)_{i,i} = A_{i,i} + A_{j,i}$$
$$(AE^{i,j})_{i,i} = A_{i,i}$$

und somit $A_{j,i} = 0$.
Da dies für alle derartigen i, j gilt, wissen wir bereits, dass A eine Diagonalmatrix ist.
Nun betrachten wir $E^{i,j}A = AE^{i,j}$ an der Stelle (i,j). Es gelten

$$(E^{i,j}A)_{i,j} = A_{i,j} + A_{j,j} = A_{j,j}$$
$$(AE^{i,j})_{i,j} = A_{i,i} + A_{i,j} = A_{i,i}$$

also $A_{j,j} = A_{i,i}$.
Es müssen also auch alle Einträge in der Diagonale gleich sein, womit nur noch die Skalarmatrizen übrig bleiben.
Diese sind tatsächlich mit jeder anderen Matrix vertauschbar. Allerdings sind nicht alle in G: die Nullmatrix ist die Ausnahme. Das Zentrum von G besteht daher aus den nichtverschwindenden Skalarmatrizen:

$$Z(G) = \{rE^{(n)} \mid r \in \mathbb{R}^*\}.$$

($\mathbb{R}^*$ bezeichnet hier die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $E^{(n)}$ die Einheitsmatrix vom Format $n \times n$.)

(b) Finden Sie eine möglichst große abelsche Untergruppe von G. (Sie sollte zumindest größer als das Zentrum sein.)

Lösung:

Die Diagonalmatrizen sind gegenüber Matrixmultiplikation abgeschlossen und untereinander vertauschbar.
Sie sind genau dann invertierbar, wenn alle Einträge in der Diagonale von 0 verschieden sind.
Diese bilden daher eine abelsche Untergruppe.

Weitere Anmerkung: Diese Untergruppe kann nicht zu einer größeren abelschen Untergruppe erweitert werden: Ist A mit jeder Diagonalmatrix vertauschbar, dann wählen wir für $i \neq j$ eine Diagonalmatrix $D := \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ mit $d_i \neq d_j$ (z.B. $d_i = 1$, $d_j = 0$). Multiplizieren wir damit A von links bzw. rechts, so erhalten wir $(DA)_{i,} = d_i A_{i,}$ und $(AD)_{,j} = d_j A_{,j}$, und somit insbesondere $(DA)_{i,j} = d_i A_{i,j}$ und $(AD)_{i,j} = d_j A_{i,j}$. Wegen der Vetauschbarkeit muss dann $d_i A_{i,j} = d_j A_{i,j}$ sein, also $(d_i - d_j)A_{i,j} = 0$, was wegen $d_i \neq d_j$ (bzw. im konkreten Beispiel: $d_i - d_j = 1$) schließlich $A_{i,j} = 0$ zu Folge hat. A muss daher ebenfalls eine Diagonalmatrix sein.

Andere Möglichkeit: Man erweitert das Zentrum um irgendeine weitere Matrix A. Die dadurch erzeugte Untergruppe ist $\{rA^k \mid r \in \mathbb{R}^*, k \in \mathbb{Z}\}$. Größer wird es, wenn wir sogar um zwei vertauschbare Matrizen A, B erweitern. Dann erhalten wir $\{rA^k B^\ell \mid r \in \mathbb{R}^*, k \in \mathbb{Z}, \ell \in \mathbb{Z}\}$.

3. Finden Sie, wenn möglich

(a) einen Homomorphismus von der Gruppe $\mathbb{Z}_6$ nach $\mathbb{Z}_7$;

Lösung:

Nullabbildung.

(b) einen Homomorphismus von der Gruppe $\mathbb{Z}_6$ nach $\mathbb{Z}_{12}$;

Lösung:

Nullabbildung bzw. Bsp. zu Teil 3d.

(c) einen injektiven Homomorphismus von der Gruppe $\mathbb{Z}_6$ nach $\mathbb{Z}_7$;

Lösung:

Kann es nicht geben, weil $h(\mathbb{Z}_6)$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_7$ sein müsste. Diese hat jedoch keine Untergruppe mit 6 Elementen.

(d) einen injektiven Homomorphismus von der Gruppe $\mathbb{Z}_6$ nach $\mathbb{Z}_{12}$.

Lösung:

Die Abbildung $[a]_6 \mapsto [a]_{12}$ funktioniert nicht, weil z.B. $[3]_6 + [4]_6 = [1]_6$, aber $[3]_{12} + [4]_{12} = [7]_{12} \neq [1]_{12}$.
Aber die Definition

$$h([a]_6) := [2a]_{12}$$

ergibt tatsächlich einen Homomorphismus:
$h([a]_6 + [b]_6) = h([a+b]_6) = [2(a+b)]_{12} = [2a]_{12} + [2b]_{12} = h([a]_6) + h([b]_6)$.
Und sie ist offensichtlich injektiv.

Lösung:

Diverse Anmerkungen dazu, ob $\mathbb{Z}_6$ eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_7$ oder $\mathbb{Z}_{12}$ ist:

$\mathbb{Z}_6$ ist auf keinen Fall eine Untergruppe von $\mathbb{Z}_7$, weil $\mathbb{Z}_7$ keine 6-elementige Untergruppe hat.

Da keine Restklasse modulo 6 mit einer Restklasse modulo 7 übereinstimmt, kann genaugenommen auch $\mathbb{Z}_6$ keine Untergruppe von $\mathbb{Z}_{12}$ sein, weil sie nicht einmal eine Teilmenge ist. Allerdings könnte man $[a]_6$ mit $[2a]_{12}$ identifizieren (so wie man z.B. eine ganze Zahl n mit der rationalen Zahl $\frac{n}{1}$ identifiziert, um $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ zu erreichen). Dabei ist entscheidend, dass diese Zuordnung ein injektiver Homomorphismus ist. Insbesondere ist zu beachten, dass man $[a]_6$ nicht sinnvoll mit $[a]_{12}$ identifizieren kann, weil $\{[0]_{12}, [1]_{12}, \ldots, [5]_{12}\}$ keine Untergruppe von $\mathbb{Z}_{12}$ ist.

Die Sachlage wird etwas anschaulicher, wenn man $[1]_6$ als Drehung um $\frac{1}{6}$ des vollen Winkels versteht, und $[1]_{12}$ als Drehung um $\frac{1}{12}$ des vollen Winkels. Und die Addition als Hintereinanderausführung der Drehungen. Dann ist tatsächlich z.B. $[1]_6 = [2]_{12}$ und $\mathbb{Z}_6$ Untergruppe von $\mathbb{Z}_{12}$.

4. Mit $d_\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bezeichnen wir die Drehung der Punkte der Ebene um den Winkel α (gegen den Uhrzeigersinn) mit Zentrum im Ursprung.

(a) Zeigen Sie, dass $\{d_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ eine Untergruppe von $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ ist.

Lösung:

$d_\beta \circ d_\alpha = d_{\beta+\alpha}$, $\mathrm{id} = d_0$, $(d_\alpha)^{-1} = d_{-\alpha}$.

(b) Sei weiters $s_\beta : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Spiegelung an der Geraden durch den Ursprung, welche mit der x-Achse den Winkel β einschließt. Bildet auch die Menge aller derartigen Spiegelungen eine Untergruppe?

Lösung:

$s_\alpha \circ s_\alpha = \mathrm{id}$*; dies ist keine Spiegelung; also keine Untergruppe.*

(c) Finden Sie eine einfache Formel für $s_\beta \circ s_\alpha$.

Hinweis: Überlegen Sie sich geometrisch, warum das Ergebnis eine Drehung sein muss. Bestimmen Sie dann, was mit einem Punkt auf der Symmetrieachse von s_α passiert.

Lösung:

Die geometrische Anschauung macht klar, dass durch Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen nur eine Drehung entstehen kann. Um den Drehwinkel zu bestimmen, sehen wir uns an, was mit einem Punkt auf der Symmetrieachse von s_α passiert: Von der Spiegelung s_α bleibt er ziemlich unbeeindruckt; die Spiegelung s_β dagegen dreht ihn um den Winkel $2(\beta - \alpha)$. Daher: $s_\beta \circ s_\alpha = d_{2(\beta-\alpha)}$.

(d) Zeigen Sie, dass die Menge bestehend aus allen Drehungen und Spiegelungen eine Untergruppe von $S_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}$ ist.

Hinweis: Zentraler Punkt im Beweis ist der Nachweis, dass alle Produkte aus Drehungen und Spiegelungen wieder Drehungen oder Spiegelungen ergeben.

Lösung:

Wir haben bereits gesehen, dass das Produkt zweier Drehungen oder zweier Spiegelungen stets eine Drehung ergibt. Es geht also nur noch um die gemischten Hintereinanderausführungen.

Aus der Formel im vorigen Unterpunkt erhalten wir durch Umformen:
$s_\alpha = s_\beta \circ d_{2(\beta-\alpha)}$ *und* $s_\beta = d_{2(\beta-\alpha)} \circ s_\alpha$.
Wir setzen $2(\beta - \alpha) = \gamma$ und lösen nach α und β auf:
$\beta = \alpha + \frac{\gamma}{2}$ *bzw.* $\alpha = \beta - \frac{\gamma}{2}$. *Daher:* $s_\beta \circ d_\gamma = s_{\beta-\frac{\gamma}{2}}$ *und* $d_\gamma \circ s_\alpha = s_{\alpha+\frac{\gamma}{2}}$.

Die Hintereinanderausführung einer Drehung und eines Spiegelung ergibt also in jeder Reihenfolge eine Spiegelung, wobei die Spiegelungsachse um den halben Drehwinkel gedreht wird.

5. (a) Wir zeichnen ein achsenparalleles Quadrat mit Zentrum im Ursprung. Die 4 Drehungen um ein Vielfaches eines rechten Winkels und die 4 Spiegelungen an den Achsen und Diagonalen bilden eine Gruppe (die Diedergruppe D_4, vgl. Skriptum). Bestimmen Sie von jeder dieser Abbildungen, wie sie die Ecken des Quadrates permutiert, und wie die D_4 daher als Untergruppe von S_4 aufgefasst werden kann?

Lösung:

$d_{0^\circ} = ()$, $d_{90^\circ} = (1,2,3,4)$, $d_{180^\circ} = (1,3)(2,4)$, $d_{270^\circ} = (1,4,3,2)$, $s_{0^\circ} = (1,4)(2,3)$, $s_{90^\circ} = (1,2)(3,4)$, $s_{45^\circ} = (1,3)$, $s_{135^\circ} = (2,4)$.

(b) Bestimmen Sie für die Elemente der D_4 Abbildungsmatrizen bezüglich der kanonischen Basis, sodass sich die D_4 auch als eine Untergruppe von $\mathrm{Gl}(2, \mathbb{R})$ auffassen läßt.

Lösung:

$d_{0^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d_{90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $d_{180^\circ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $d_{270}{}^\circ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

$s_{0^\circ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $s_{90^\circ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $d_{45^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $d_{135^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

6. Die Elemente der S_3 können Sie auch als Drehungen und Spiegelungen interpretieren, welche ein gleichseitiges Dreieck in sich überführen.

   (a) Bestimmen Sie die Ordnungen aller Elemente von S_3.

   Lösung:

   Die beiden Permutationen, welche alle 3 Punkte bewegen, lassen sich als Drehungen um 120° bzw. -120° interpretieren. Sie haben Ordnung 3.

   Die identische Abbildung hat, so wie immer, die Ordnung 1 und entspricht der Drehung um 0°.

   Die 3 Vertauschungen zweier Punkte entsprechen den Spiegelungen an den Streckensymmetralen und haben Ordnung 2.

   (b) Finden Sie alle Untergruppen von S_3. Welche Ordnungen haben sie? Welche davon sind zyklisch?

   Lösung:

   Jede Spiegelung ist zu sich selbst invers und bildet daher, zusammen mit der identischen Abbildung, eine zyklische Untergruppe der Ordnung 2.

   Die beiden nicht-identischen Drehungen sind zueinander invers. Alle 3 Drehungen zusammen bilden daher eine zyklische Untergruppe der Ordnung 3.

   Das neutrale Element ganz alleine bildet eine zyklische Untergruppe der Ordnung 1.

   Sobald eine Untergruppe eine nicht-identische Drehung und eine Spiegelung beinhaltet, enthält sie, wegen der Abgeschlossenheit bereits alle Elemente der S_3, sodass es insbesondere keine Untergruppen der Ordnung 4 oder 5 gibt. Die ganze S_3 aber ist eine Untergruppe von sich selbst. Sie hat Ordnung 6 und ist nicht zyklisch.

   (c) Bestimmen Sie das Zentrum von S_3.

   Lösung:

   Nur die identische Abbildung ist im Zentrum.

   (d) Bestimmen Sie von allen Untergruppen auch alle Links- und Rechtsnebenklassen sowie deren Index.

   Lösung:

   Die Nebenklassen der 1-elementigen Untergruppe sind alle 1-elementigen Teilmengen. Index: 6.

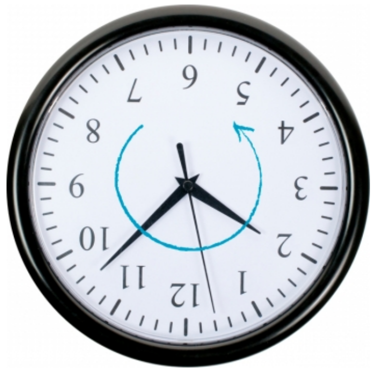
   Die Nebenklasse der Untergruppe S_3 bestehen aus eben nur dieser. Index: 1.

   Die Nebenklassen der Untergruppe bestehend aus den 3 Drehungen sind: diese Untergruppe selbst, sowie die Mengen aller Spiegelungen. Die Rechts- und Linksnebenklassen stimmen damit klarerweise überein, obwohl Drehungen und Spiegelungen nicht vertauschbar sind. Index: 2.

   Sei $U = \{\mathrm{id}, (1,2)\}$.
   Linksnebenklassen: $\mathrm{id} \circ U = U = (1,2) \circ U$, $(1,2,3) \circ U = \{(1,2,3),(1,3)\} = (1,3) \circ U$, $(1,3,2) \circ U = \{(1,3,2),(2,3)\} = (2,3) \circ U$. *Index 3.*
   Rechtsnebenklassen: $U \circ \mathrm{id} = U = U \circ (1,2)$, $U \circ (1,2,3) = \{(1,2,3),(2,3)\} = U \circ (2,3)$, $U \circ (1,3,2) = \{(1,3,2),(1,3)\} = U \circ (1,3,2)$. *Index 3.*
   Die Recht- und Linksnebenklassen stimmen hier nicht überein.

Für die anderen Untergruppen der Ordnung 2 *(unterscheiden sich von U nur durch eine Umbenennung der Punkte) ergibt sich ein entsprechendes Bild.*

Bonus Ein leicht verrückter Mathematiker bekam zur Faschingszeit eine Uhr geschenkt, die verkehrt herum läuft, mit an der vertikalen Achse gespiegeltem Ziffernblatt. In seiner Verzweiflung hängte er sie verkehrt herum auf (mit dem 12er nach unten). Es war ihm natürlich sofort klar, dass sie immer noch verkehrt herum läuft, denn sie ist ja immer noch gespiegelt. Nur die Spiegelungsachse ist anders, nämlich horizontal. Aber da kam er ins Grübeln: Warum ist die Spiegelungsachse nur um 90° verdreht, wo er doch die ganze Uhr um 180° gedreht hat? Wie kann es sein, dass die Achse dabei nur halb so schnell gedreht wurde? Nun ist er ganz verrückt. Die behandelnden Ärzte sind ratlos und meinen, nur eine einfache Erklärung des Phänomens würde ihn heilen. Können Sie helfen?



Lösung:
Eigentlich geht es bloß um die Hintereinanderausführung von einer Spiegelung und einer Drehung, für die wir im Beispiel 4d die passende Formel gefunden haben. Konkret:

$$d_{180^\circ} \circ s_{90^\circ} = s_{90^\circ + \frac{180^\circ}{2}} = s_{180^\circ} = s_0.$$

Die Herleitung in 4d war einfaches Umformen von 4c, und 4c konnte durch ein einfaches geometrisches Argument hergeleitet werden und sollte für jeden Mathematiker leicht nachvollziehbar sein.