UE Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
KV Algebra und Diskrete Mathematik

5. Übungszettel, 23. April 2013

1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv_m b$ und $c \equiv_m d$.

   (a) Zeigen Sie, dass $a + c \equiv_m b + d$ und $ac \equiv_m bd$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass, für alle $n \in \mathbb{N}$, $na \equiv_m nb$ und $a^n \equiv_m b^n$ gilt.

   Zeigen Sie damit, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $3^{2^n} - 2^n$ durch 7 teilbar ist.

2. (a) Wie viele Elemente von $(\mathbb{Z}_{51700}, \cdot)$ sind invertierbar?

   (b) Welche der folgenden Elemente sind invertierbar: $[50]_{51700}$, $[55]_{51700}$, $[199]_{51700}$? Berechnen Sie, wenn möglich, das entsprechende inverse Element.

3. Zeigen Sie, dass die Worthalbgruppe $(\{b\}_*, *)$ über dem Alphabet $\{b\}$ isomorph zur Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$ ist.

4. Sei $(H, \cdot)$ ein kommutatives Monoid, das die Kürzungsregel erfüllt. Auf $H \times H$ sei die Relation $\sim$ definiert durch $(a, b) \sim (c, d) :\Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Wir definieren weiters eine Operation $\odot$ auf $(H \times H)/_\sim$ mit $[(a, b)] \odot [(c, d)] = [(a \cdot c, b \cdot d)]$

   (a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

   (b) Zeigen Sie, dass $\odot$ verträglich ist mit $\sim$.

5. Die reellen Polynome $(\mathbb{R}[x] \setminus \{\mathbf{o}\}, \cdot)$ bilden ein kommutatives Monoid. Erfüllt es die Kürzungsregel? Wie sieht die Quotientengruppe G aus und unter welchen Namen kennen Sie die Elemente von G?
   Anmerkung: $\mathbf{o}$ ist das Nullpolynom.

Bonus Ein Fast-Food-Restaurant verkauft Chicken Wings in Packungen von 6, 9 und 20 Wings. Was ist die größte Zahl an Chicken Wings, die man durch Kombination der Packungen nicht kaufen kann? (Anmerkung: Der Vorrat an Chicken Wings ist (hoffentlich) unbegrenzt!)