UE Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
KV Algebra und Diskrete Mathematik

4. Übungszettel, 19. März 2013

1. (a) Minimieren Sie das Boolsche Polynom
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2'x_4 + x_1x_3'x_4 + x_1'x_3x_4 + x_1'x_3'x_4.$$
Was passiert, wenn Sie den ersten Schritt im Algorithmus von Quine-McCluskey auslassen und einfach die Summanden dieses Polynoms als erste „Verschmelzungsprodukte“ verwenden?
   (b) Minimieren Sie $(x_1x_2x_3 + x_4)(x_1x_2x_3x_4)'$.

2. (a) Finden Sie Beispiele von Zahlen, sodaß $x \mid ab$, aber weder $x \mid a$ noch $x \mid b$. Zeigen Sie dann: Wenn $x \mid ab$ und $\mathrm{ggT}(x, a) = 1$, dann gilt $x \mid b$. Hinweis: Dieser Satz lässt sich ohne die Verwendung von Sätzen über Primzahlen beweisen. Versuchen Sie stattdessen Satz 7.1 zu verwenden.
   (b) Finden Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung
$$12x + 10y = 0.$$
Überlegen Sie sich, ob die Lösungsmenge abgeschlossen gegenüber Summen, Differenzen und Vielfachen (alles komponentenweise definiert) ist. Geben Sie die Lösungsmenge insbesondere unter Verwendung eines freien Parameters an. Leiten Sie aus dieser Erfahrung eine allgemeine Lösungsformel für diophantische Gleichungen der Form $ax + by = 0$ her.
Hinweis: Beim Beweis, dass tatsächlich alle Lösungen diese Form haben, ist Beispiel 2a hilfreich.

3. (a) Finden Sie eine ganzzahlige Lösung der Gleichung
$$2352x + 1945y = 10.$$
   (b) Was läßt sich allgemein über die Differenz zweier Lösungen einer diophantischen Gleichung aussagen? Inwiefern ist die Situation hier ähnlich wie bei linearen Gleichungssystemen?

4. Für welche Elemente $[x]$ von $\mathbb{Z}_{12}$ läßt sich ein Inverses $[y]$ finden (im Sinne von $[x][y] = [1]$? Welche Elemente von $\mathbb{Z}_{12}$ sind Quadrate?

5. (a) Sei $M = \{0, 1, 2\}$. Wir betrachten die Relationenhalbgruppe $R(M)$ auf dieser Menge. Bestimmen Sie $R \diamond S$, $S \diamond R$, R^2, S^2, R^3, $R^2 \diamond S$, R^4 für $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2)\}$ und $S = \{(1, 2), (2, 1), (2, 0)\}$.
   (b) Zeigen Sie detailliert, dass das Relationenprodukt tatsächlich assoziativ ist.
   (c) Für Relationen definiert man
$$R^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$
Warum ist $R(M)$ dennoch keine Gruppe?
   (d) Beschreiben Sie den Gruppenkern von $R(M)$.