UE Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
KV Algebra und Diskrete Mathematik

4. Übungszettel, 19. März 2013

Lösungen

1. (a) Minimieren Sie das Boolsche Polynom

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2'x_4 + x_1x_3'x_4 + x_1'x_3x_4 + x_1'x_3'x_4.$$

Lösung:
Nach Expandieren in die volle DNF und zwei Verschmelzungsschritten erhalten wir:

$$x_1x_2x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 + x_2x_4 + x_2'x_4 + x_3'x_4 + x_1'x_4,$$

wobei $x_1x_2x_3$ aus dem vorigen Schritt übriggeblieben ist.
Alle Verschmelzungen im nächsten Schritt führen zu x_4, und die Zweierprodukte fallen weg.
Alle Primimplikanden gehören zum Herz.
Die Minimalform ist daher:

$$x_1x_2x_3 + x_4.$$

Was passiert, wenn Sie den ersten Schritt im Algorithmus von Quine-McCluskey auslassen und einfach die Summanden dieses Polynoms als erste „Verschmelzungsprodukte" verwenden?
Lösung:
Im folgenden Schritt erhält man dann nur die Verschmelzungen zu $x_3'x_4$ und $x_1'x_4$, wobei 2 Dreierprodukte übrigbleiben. Die „Minimalform" wäre somit:

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2'x_4 + x_3'x_4 + x_1'x_4.$$

(b) Minimieren Sie $(x_1x_2x_3 + x_4)(x_1x_2x_3x_4)'$.
Lösung:
Der erste Teil dieses Polynoms ist die Minimalform von vorhin. Die kleine Störung führt letztlich zu:

$$x_1'x_4 + x_2'x_4 + x_3'x_4 + x_1x_2x_3x_4'.$$

2. (a) Finden Sie Beispiele von Zahlen, sodaß $x \mid ab$, aber weder $x \mid a$ noch $x \mid b$. Zeigen Sie dann: Wenn $x \mid ab$ und $\mathrm{ggT}(x, a) = 1$, dann gilt $x \mid b$. Hinweis: Dieser Satz lässt sich ohne die Verwendung von Sätzen über Primzahlen beweisen. Versuchen Sie stattdessen Satz 7.1 zu verwenden.
Lösung:
Sei $ab = xy$ und $\lambda x + \mu a = 1$. Dann ist $b = 1b = (\lambda x + \mu a)b = \lambda xb + \mu ab = \lambda xb + \mu xy = x(\lambda b + \mu y)$.

(b) Finden Sie alle ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$12x + 10y = 0.$$

Überlegen Sie sich, ob die Lösungsmenge abgeschlossen gegenüber Summen, Differenzen und Vielfachen (alles komponentenweise definiert) ist. Geben Sie die Lösungsmenge insbesondere unter Verwendung eines freien Parameters an. Leiten Sie aus dieser Erfahrung eine allgemeine Lösungsformel für diophantische Gleichungen der Form $ax + by = 0$ her.

Hinweis: Beim Beweis, dass tatsächlich alle Lösungen diese Form haben, ist Beispiel 2a hilfreich.

Lösung:

Wir dividieren durch $\mathrm{ggT}(12, 10) = 2$ *und erhalten*

$$6x + 5y = 0$$

bzw $6x = -5y$. *Da* $6 \mid 5y$, *aber* $\mathrm{ggT}(6, 5) = 1$, *erhalten wir* $6 \mid y$, *also* $y = 6t$, *mit dem freien Parameter* $t \in \mathbb{Z}$. *Einsetzen ergibt* $6x = -5 \cdot 6t$, *also* $x = -5t$.
Einfaches Nachrechnen ergibt sofort, dass dies tatsächlich Lösungen sind.
Allgemein ergibt sich somit für $ax + by = 0$ *die Lösungsmenge*

$$\{(-\frac{b}{d}t,\ \frac{a}{d}t) \mid t \in \mathbb{Z}\},$$

wobei $d = \mathrm{ggT}(a, b)$.

3. (a) Finden Sie eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$2352x + 1945y = 10.$$

(b) Was läßt sich allgemein über die Differenz zweier Lösungen einer diophantischen Gleichung aussagen? Inwiefern ist die Situation hier ähnlich wie bei linearen Gleichungssystemen?

Lösung:

Die Differenz ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung. Der Unterschied zu linearen Gleichungen ist somit nur, dass die Koeffizienten ganze Zahlen sind, also keinen Körper bilden. Deshalb hat die Meschheit Moduln erfunden.

4. Für welche Elemente $[x]$ von $\mathbb{Z}_{12}$ läßt sich ein Inverses $[y]$ finden (im Sinne von $[x][y] = [1]$?

Lösung:

$1, 5, 7, 11$, *d.h. genau jene, die teilerfremd zu* 12 *sind.* Welche Elemente von $\mathbb{Z}_{12}$ sind Quadrate?

Lösung:

$[0], [1], [4], [9]$. *Bemerkenswert hier sind noch* $[4]^2 = [4]$ *und* $[5]^2 = [1]$.

5. (a) Sei $M = \{0, 1, 2\}$. Wir betrachten die Relationenhalbgruppe $R(M)$ auf dieser Menge. Bestimmen Sie $R \diamond S$, $S \diamond R$, R^2, S^2, R^3, $R^2 \diamond S$, R^4 für $R = \{(0, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2)\}$ und $S = \{(1, 2), (2, 1), (2, 0)\}$.

Lösung:
$R \diamond S = \{(0, 2,), (1, 0), (1, 1), (2, 1)\}$,
$S \diamond R = \{(1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$,
$R^2 = \{(0, 2), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 0)\}$,
$S^2 = \{(1, 0), (1, 1), (2, 2)\}$,
$R^3 = \{(0, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$,
$R^2 \diamond S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$,
$R^4 = M \times M$.

(b) Zeigen Sie detailliert, dass das Relationenprodukt tatsächlich assoziativ ist.

(c) Für Relationen definiert man

$$R^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

Warum ist $R(M)$ dennoch keine Gruppe?|

Lösung:
$R \diamond R^{-1}$ ist ein echte Teilmenge der Diagonale, wenn R nicht bijektiv ist. Insbesondere ist $\varnothing \diamond \varnothing = \varnothing$, was nur dann das neutrale Element ist, wenn $M = \varnothing$, also $R(M) = \{\varnothing\}$, was tatsächlich eine Gruppe ist.

(d) Beschreiben Sie den Gruppenkern von $R(M)$.

Lösung:
Die bijektiven Funktionen.