UE Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
KV Algebra und Diskrete Mathematik

4. Übungszettel, 19. März 2013

Lösungen

5 (a) Sei $M = \{0, 1, 2\}$. Wir betrachten die Relationenhalbgruppe $R(M)$ auf dieser Menge. Bestimmen Sie $R \diamond S$, $S \diamond R$, R^2, S^2, R^3, $R^2 \diamond S$, R^4 für $R = \{(0,1), (1,2), (2,0), (2,2)\}$ und $S = \{(1,2), (2,1), (2,0)\}$.

Lösung:

$R \diamond S = \{(0, 2,), (1, 0), (1, 1), (2, 1)\}$,

$S \diamond R = \{(1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$,

$R^2 = \{(0, 2), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 0)\}$,

$S^2 = \{(1, 0), (1, 1), (2, 2)\}$,

$R^3 = \{(0, 0), (0, 2), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$,

$R^2 \diamond S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2)\}$,

$R^4 = M \times M$.

(b) Zeigen Sie detailliert, dass das Relationenprodukt tatsächlich assoziativ ist.

Lösung:

Einsetzen der Definition und „Einfaches Nachrechnen“. Aber Vorsicht auf exaktes logisches Argumentieren!

(c) Für Relationen definiert man

$$R^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}.$$

Warum ist $R(M)$ dennoch keine Gruppe?|

Lösung:

$R \diamond R^{-1}$ ist ein echte Teilmenge der Diagonale, wenn R nicht bijektiv ist. Insbesondere ist $\varnothing \diamond \varnothing = \varnothing$, was nur dann das neutrale Element ist, wenn $M = \varnothing$, also $R(M) = \{\varnothing\}$, was tatsächlich eine Gruppe ist.

(d) Beschreiben Sie den Gruppenkern von $R(M)$.

Lösung:

Die bijektiven Funktionen. Ist R im Gruppenkern, dann muss für jedes $a \in M$ $(a, a) \in R \diamond R^{-1}$ gelten. Daher muss es auch ein $b \in M$ geben, mit $(a, b) \in R$, somit ist R überall definiert. Sind dagegen $(a, b) \in R$ und $(a, c) \in R$, dann ist auch $(b, c) \in R^{-1} \diamond R = \mathrm{id}$, somit $b = c$. Daher ist R auch wohldefiniert. Durch Umkehrung der Reihenfolge erhält man auf dieselbe Weise, dass R auch injektiv und surjektiv sein muss.