UE Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
KV Algebra und Diskrete Mathematik

2. Übungszettel, 19. März 2013

1. Zeigen Sie: In einem Verband ist das neutrale Element für die eine Verknüpfung genau das Nullelement für die andere, d.h. für jedes Element e gilt

$$(\forall a : a \cup e = a) \iff (\forall a : a \cap e = e)$$

sowie

$$(\forall a : a \cap e = a) \iff (\forall a : a \cup e = e)$$

2. Beweisen Sie Satz 1.10 aus dem Skriptum. (Jeder Verband führt zu einer verbandsgeordneten Menge und umgekehrt.) Zeigen Sie weiters, dass die Hintereinanderausführung dieser beiden Konstruktionen, egal in welcher Reihenfolge, die Identität ist. D.h. wenn wir von einem Verband ausgehen, dazu gemäß Teil a) eine verbandsgeordnete Menge bilden, dann erhalten wir mit der Konstruktion aus Teil b) wieder denselben Verband. Entsprechendes gilt, wenn wir von einer verbandsgeordneten Menge ausgehen.

3. Zeigen Sie, dass das „Pentagon“ (Beispiel nach Definition 2.1) ein Beispiel für einen nicht-distributiven Verband liefert.

4. Sei V der Verband der Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ (geordnet mit $\subseteq$). Finden Sie darin ein Beispiel, welches die Kürzungsregel verletzt, und beweisen Sie Satz 2.2.

5. Zeigen Sie, dass $\mathbb{B}^M$ (Beispiel 2.7.c) stets ein Boolscher Verband ist.

6. (Bonusaufgabe) Definieren Sie passende Operationen $\cap$ und $\cup$, sodass $(\mathbb{N}, \cap, \cup)$ ein boolscher Verband ist.