

# UE Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik

## KV Algebra und Diskrete Mathematik

12. Übungszettel, 18. Juni 2013

1. Bilden Sie  $\text{GF}(9)$  auf 2 Arten, d.h. mit 2 verschiedenen irreduziblen Polynomen.
  - (a) Zeigen Sie, dass jedes dieser Polynome über jeder Variante von  $\text{GF}(9)$  in Linearfaktoren zerfällt.
  - (b) Bestimmen Sie in jeder Variante ein primitives Element und dessen Minimalpolynom. Ist letzteres maximalperiodisch?
  - (c) Geben Sie einen Isomorphismus zwischen beiden Varianten an.
  - (d) Müssen bei jedem Isomorphismus zwischen Körpern alle primitiven Elemente auf primitive Elemente abgebildet werden?
  - (e) Gibt es einen Automorphismus von (irgendeiner Variante von)  $\text{GF}(9)$ , welcher eine Nullstelle von  $x^2 + 1$  auf eine Nullstelle von  $x^2 + x + 1$  abbildet?
2. Sei  $f$  irreduzibel über  $\mathbb{Z}_2$ , so wie in Beispiel 19.11.
  - (a) Bestimmen Sie alle Nullstellen von  $f$  in  $\text{GF}(16)$ .
  - (b) Wieviele Automorphismen von  $\text{GF}(16)$  gibt es?
  - (c) Hängt dies vom gewählten irreduziblen Polynom ab?
  - (d) Wieviele Isomorphismen gibt es zwischen 2 verschiedenen Varianten von  $\text{GF}(16)$ ?
3. Im auf der Website zur Verfügung stehenden Dokument `vorlesung-codeintro.pdf` finden Sie Hinweise u.a. zu ISBN-13.
  - (a) Bei der Buchnummer 97814?1931177 konnte eine Stelle nicht gelesen werden. Um welches Buch handelt es sich?  
*Anmerkung:* Bestimmen Sie dabei die fehlende Stelle nicht durch Erraten sondern durch Lösen der Kongruenzgleichung.
  - (b) Zeigen Sie, dass bei ISBN-13 alle einfachen Tippfehler (d.h. genau eine Ziffer falsch) beim ISBN-13-Code erkannt wird.
  - (c) Finden Sie Beispiele, dass einfache Vertauschungen zweier benachbarter Ziffern bei ISBN-13 nicht immer erkannt werden.
4. Bei ISBN-10 wird die 10. Ziffer aus den ersten 9 berechnet, sodass
$$a_{10} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \dots + 9a_9 \pmod{11}.$$
Wenn der Rest dabei 10 ist, wird anstatt einer Ziffer das Symbol X geschrieben. Zeigen Sie, dass bei diesem Code sowohl alle einfachen Tippfehler als auch alle einfachen Vertauschungen benachbarter Stellen erkannt werden.
5. Wir verwenden den Code aus Beispiel 20.1 und erhalten die Nachrichten 101101, 110101, 111111. Wurden diese fehlerfrei übertragen? Wenn nicht, versuchen Sie die Nachrichten zu rekonstruieren.