UE Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
KV Algebra und Diskrete Mathematik

10. Übungszettel, 4. Juni 2013

1. Beweisen Sie den Vandermonde'schen Faltungssatz (Satz 17.6 im Skript).

2. Sei I die Menge aller Polynome über $\mathbb{Z}_3$, welche die Nullfunktion induzieren. Zeigen Sie, dass I ein Ideal von $\mathbb{Z}_3[x]$ ist. Bestimmen Sie ein f, sodass $I = (f)$. Ist $\mathbb{Z}_3[x]/I$ ein Körper?

3. Sei $p = x^2 + 1$. Ist p über $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ irreduzibel? Liegen die Polynome $x + 1$, $x^2 + 2$, $x^3 + 1$, $x^4 + 2$, bzw. $x^6 + 1$ im Ideal (p)?

4. Sei p wie zuvor. Bilden Sie den Ring $R := \mathbb{Z}_3[x]/(p)$ und berechnen Sie dessen Multiplikationstafel. Warum ist R ein Körper? Finden Sie in R ein Element e, sodass $\{e, e^2, e^3, e^4, ...\}$ alle Elemente von R enthält, außer das Nullelement. Suchen Sie ein Polymom m möglichst niedrigen Grades in $\mathbb{Z}_3[x]$ (aber nicht das Nullpolynom), sodass $m(e) = 0$.

5. Sei p wie zuvor. Finden Sie einen Körper, über den p vollständig in Linearfaktoren zerfällt und bestimmen Sie diese.