Übungen Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik

19. Für eine Halbgruppe $(H, \circ)$ und $\phi \neq T \subseteq H$ sei $\langle T \rangle$ die von T erzeugte Unterhalbgruppe. Zeigen Sie, dass die Halbgruppen $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Q}, \cdot)$ von keiner endlichen Menge erzeugt werden können.

20. Sei $(H, \circ)$ eine Halbgruppe und $\{H_i \mid i \in I\}$ eine Menge von Unterhalbgruppen von H. Zeigen Sie, dass auch $\bigcap\limits_{i \in I} H_i$ eine Unterhalbgruppe von H ist. Finden Sie zwei Unterhalbgruppen H_1, H_2 einer Halbgruppe H, sodass $H_1 \cup H_2$ keine Unterhalbgruppe von H ist.

21. Bestimmen Sie alle Unterhalbgruppen von $(\mathbb{Z}_8, \circledcirc)$.

22. Zeigen Sie: Jede endliche Unterhalbgruppe U einer Gruppe G ist selbst eine Gruppe. Kann die Voraussetzung der Endlichkeit weggelssen werden?
Hinweis: Bilden Sie für $u \in U$ die Menge $\{u^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

23. Sei $(H, \circ)$ ein Monoid und $x \in H$. Zeigen Sie:
$$x \text{ ist invertierbar } \Leftrightarrow xH = Hx = xH$$

24. Eine Halbgruppe $(H, \circ)$ erfüllt die Kürzungsregel, falls:
$$\forall x, y, z \in H : (x \circ y = x \circ z \Rightarrow y = z) \wedge (y \circ x = z \circ x \Rightarrow y = z)$$
Zeigen Sie: Jede Gruppe erfüllt die Kürzungsregel. Gilt auch die Umkehrung, d.h. ist jede Halbgruppe mit Kürzungsregel eine Gruppe? Geben Sie auch ein Beispiel für eine Halbgruppe, welche die Kürzungsregel nicht erfüllt.