

Übungen Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik

1. Sei S_n , $n \in \mathbb{N}$, die Menge aller Schaltungen mit n Schaltern, s die Serienschaltung und p die Parallelschaltung. Zeigen Sie, dass (S_n, s, p) ein beschränkter Verband ist. Bestimmen Sie 0 und 1 bzgl. der Verbandsordnung.
2. Welche der folgenden geordneten Mengen sind verbandsgeordnet bzw. beschränkt? Bestimmen Sie gegebenenfalls \sqcap und \sqcup .
 - (a) $(\{U \mid U \text{ Unterraum von } V\}, \subseteq)$ für einen Vektorraum V .
 - (b) $(\{S \mid S \subseteq \mathbb{N}, S \text{ unendlich}\}, \subseteq)$
 - (c) (\mathbb{N}, \mid) , wobei $m \mid n$ "m teilt n" für $m, n \in \mathbb{N}$ bedeutet.
 - (d) Eine linear geordnete Menge.
3. Zeigen Sie: Eine geordnete Menge (M, \leq) ist genau dann verbandsgeordnet, wenn $\sup H$ und $\inf H$ für jede endliche Menge $H \neq \emptyset$ existieren. Gilt diese Aussage auch für beliebige Mengen H ?
4. Man beweise, dass jeder endliche Verband V genau ein Null- und ein Einselement besitzt. Für diese Elemente 0, 1 gilt: $x \sqcup 0 = x$, $x \sqcap 0 = 0$, $x \sqcup 1 = 1$, $x \sqcap 1 = x$ für alle $x \in V$. Geben Sie ein Beispiel für einen unendlichen Verband ohne 0 und 1.
5. Sei (V, \sqcap, \sqcup) ein Verband. Zeigen Sie, dass dann auch (V, \sqcup, \sqcap) ein Verband ist. Wie lautet die Verbandsordnung von (V, \sqcup, \sqcap) ? Überlegen Sie mögliche Anwendungen dieses Satzes.
6. Sei (V, \sqcap, \sqcup) ein Verband. Zeigen Sie:
 $\forall x \in V : x \sqcup x = x, x \sqcap x = x$ (Gesetze der Idempotenz).
Hinweis: Betrachten Sie $x \sqcap (x \sqcup (x \sqcap x))$.
7. Sei I eine Indexmenge, $(V_i, \sqcap_i, \sqcup_i)$ ein Verband für $i \in I$. Man beweise, dass das direkte Produkt $V = \prod_{i \in I} V_i$ mit den komponentenweisen Verknüpfungen wieder ein Verband ist.