

**Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik**  
**5. Übungsblatt für den 23. April 2009**

1. (a) Zeigen Sie die Behauptung 8.7 aus dem Skript ( $R(M)$  ist ein Monoid).  
(b) Bestimmen Sie den Gruppenkern.
2. (a) Ist  $(\mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \cdot)$  eine freie Halbgruppe?  
(b) Ist jedes unendliche Monoid frei?
3. (a) Finden Sie eine Menge  $M$ , sodass die Halbgruppe  $H = (\{a, b\}, *)$  mit  $a*b = a$  in  $M^M$  einbettbar ist und geben sie die Einbettung konkret an.  
(b) Zeigen Sie für dieses Beispiel direkt und im Detail (ohne Verweis auf den Satz von Cayley), dass es sich bei ihrer Wahl aus (a) tatsächlich um eine Einbettung handelt.
4. Sei  $F$  die von  $A = \{a,b\}$  erzeugte Worthalbgruppe und sei  $H$  die von  $B = \{a,ab,bb\}$  erzeugte Unterhalbgruppe von  $F$ .  
Ist  $H$  frei über  $B$ ? (Versuchen Sie, einen Isomorphismus von einer freien Worthalbgruppe nach  $H$  zu finden).
5. (a) Ist  $[22]$  in  $\mathbb{Z}_{109999}$  invertierbar? Falls ja, finden Sie das Inverse!  
(b) Wie viele nicht invertierbare Elemente gibt es in  $\mathbb{Z}_{109999}$ ?