

**Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik**  
**11. Übungsblatt für den 18. Juni 2009**

1. Ist

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Unterring des Rings aller  $2 \times 2$  Matrizen  $\mathbb{R}_2^2$  über  $\mathbb{R}$ ? Ein Ideal? Ist  $S$  ein Körper?

2. Geben Sie ein Beispiel für einen Ring, der kein Hauptidealring ist, und begründen Sie es.

3. Es sei  $p = x^3 + 4x + 2$  ein Polynom über  $\mathbb{Z}_5$ . Berechnen Sie in  $\mathbb{Z}_5[x]/p$ .

(a)  $[2x^2 + 3x]_p - [4x^2 + x + 1]_p$

(b)  $[2x^2 + 3x]_p \cdot [4x^2 + x + 1]_p$

(c)  $[2x^2 + 3x]_p^{-1}$

(d) Bestimmen Sie  $a \in \mathbb{Z}_5[x]/p$  sodass  $[2x^2 + 3x]_p \cdot a = [x + 2]_p$ .

Ist  $\mathbb{Z}_5[x]/p$  ein Körper?

4. Sei  $K$  ein Körper mit Charakteristik  $p \neq 0$ . Zeigen Sie, dass für alle  $x, y \in K$  gilt:

$$(x + y)^p = x^p + y^p.$$

5. Sei  $p$  prim,  $n \in \mathbb{N}$ , und  $f = x^{p^n} - x \in \mathbb{Z}_p[x]$ . Zeigen Sie, dass die Nullstellen von  $f$  in seinem Zerfällungskörper einen Unterkörper bilden.