KV Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik

Blatt 6

Führen Sie folgende Bsp. ganz genau aus und geben Sie in jedem Schritt an, warum Sie diesen machen dürfen.

30. Zeigen Sie, dass die Worthalbgruppe $(\{b\}_*, *)$ über dem Alphabet $\{b\}$ isomorph zur Halbgruppe $(\mathbb{N}, +)$ ist.

31. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{Z}_m, \cdot)$ für $m \notin \mathbb{P}$ eine Halbgruppe ohne Kürzungsregel ist.

32. Zeigen Sie, dass jede Gruppe eine Halbgruppe mit Kürzungsregel ist.

33. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit $a \circ a = e$ für alle $a \in G$ (dabei sei e das neutrale Element der Gruppe). Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ dann eine abelsche Gruppe ist.

34. Beweisen Sie Satz 11.8 aus dem Skriptum, dh. folgende Aussagen: Ist h ein Homomorphismus von der Gruppe $(G, \circ)$ in die Gruppe $(H, \diamond)$ mit neutralen Elementen e bzw. e', so gilt:

    (a) $h(e) = e'$ und

    (b) $h(a^{-1}) = (h(a))^{-1}$ für alle $a \in G$.

35. Sei $(G, \circ)$ eine endliche, abelsche Gruppe mit neutralem Element e. Zeigen Sie (<u>ohne</u> Verwendung des kleinen Satzes von Fermat), dass dann für alle $a \in G$ gilt $a^{|G|} = e$. (Diese Aussage gilt auch für nicht-abelsche, endliche Gruppen.)

36. Seien p, q Primzahlen mit $q | 2^p - 1$. Zeigen Sie, dass dann $q > p$ gilt (verwenden Sie dazu den Satz von Lagrange). Beweisen Sie damit, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.