KV Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik

Blatt 5

24. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$. Zeigen Sie, dass dann

    (a) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ und $ac \equiv bd \pmod{m}$ und

    (b) für alle $n \in \mathbb{N}$, $na \equiv nb \pmod{m}$ und $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ gilt.

    Zeigen Sie damit, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $3^{2n} - 2^n$ durch 7 teilbar ist.

25. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $na \equiv nb \pmod{m}$ und sei $d = \mathrm{ggT}(n, m)$. Zeigen Sie, dass dann
$$a \equiv b \pmod{m/d}$$
    gilt. Kann man hier auch $a \equiv b \pmod{m}$ folgern?

26. Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}_p$ und alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $(a+b)^{p^m} = a^{p^m} + b^{p^m}$.

27. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}_m$. Zeigen Sie, dass aus $ab = 0$ genau dann folgt dass $a = 0$ oder $b = 0$, wenn m eine Primzahl ist.

28. Beweisen Sie Satz 8.4 aus dem Skriptum, also folgende Aussagen:

    (a) Für jedes Monoid $(H, \circ)$ ist $(G_H, \circ)$ eine Gruppe.

    (b) Entält eine Halbgruppe ein neutrales Element, so ist dieses eindeutig bestimmt.

    (c) Jedes Element eines Monoids hat höchstens ein inverses Element.

29. Beweisen Sie das *Unterhalbgruppenkriterium* aus dem Skriptum, also folgende Aussage: Sei $(H, \circ)$ eine Halbruppe und sei $T \subseteq H$. Dann ist $T \leq H$ genau dann, wenn $T \neq \emptyset$ und $t_1 \circ t_2 \in T$ für alle $t_1, t_2 \in T$.