

# KV Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik

## Blatt 9

54. Zeigen Sie, dass jede Gruppe mit genau drei Untergruppen zyklisch ist.
55. Auf wieviele verschiedene Arten können die Seitenflächen eines regelmäßigen Tetraeders mit (höchstens)  $c$  Farben gefärbt werden, wenn zwei Färbungen dann als gleich angesehen werden, wenn sie durch Rotationen des Tetraeders ineinander übergeführt werden können?
56. Auf wieviele verschiedene Arten können Sie die Ecken eines Quadrats mit (höchstens) drei Farben färben, wenn zwei Färbungen dann als gleich angesehen werden, wenn sie durch Vertauschung der Farben ineinander übergeführt werden können? Das Quadrat dürfen wir dabei nicht bewegen. *Hinweis:* Sie brauchen eine neue Gruppenoperation. Es operiert jetzt  $S_3$  auf den Färbungen. Aber wie?
57. Sei  $(V, E, I)$  ein Graph. Zeigen Sie:
- (a)  $|I| = 2 \cdot |E|$ .
  - (b)  $|I| = \sum_{v \in V} \text{Grad}(v)$ .
58. Zeigen Sie, dass ein Graph eine gerade Anzahl von Knoten ungeraden Grades hat.
59. [AZ99, S. 59] Sei  $G$  ein einfacher planarer Graph mit  $v \geq 3$  Knoten und  $e$  Kanten. Zeigen Sie, dass dann  $e \leq 3v - 6$  gilt. *Hinweis:* Siehe Beweis des Satzes, der besagt, dass ein einfacher planarer Graph einen Knoten mit  $\text{Grad} \leq 5$  hat.

## Literatur

- [AZ99] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from The Book*. Springer-Verlag, Berlin, 1999. Including illustrations by Karl H. Hofmann, Corrected reprint of the 1998 original.