KV Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik

Blatt 8

48. Sei X eine nichtleere Menge und $S(X) = \{f : X \longrightarrow X, f \text{ bijektiv}\}$. Sei $G \subseteq S(X)$ eine Untergruppe von $S(X)$. Zeigen Sie, dass $* : G \times X \longrightarrow X$, $f * x = f(x)$, eine Gruppenoperation ist.

49. Sei $G = (\mathbb{R}, +)$ und $X = \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass die Abbildung $G \times X \longrightarrow X$,

$$(\alpha, \boldsymbol{x}) \longmapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \boldsymbol{x}$$

eine Gruppenoperation ist. Bestimmen Sie alle Orbits dieser Gruppenoperation.

50. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Ecken eines regelmäßigen 6-Ecks mit (höchstens) c Farben zu färben, wobei wir zwei Färbungen als gleich betrachten, wenn sie durch eine Drehung des 6-Ecks oder durch eine Spiegelung an einer der Symmetrieachsen des 6-Ecks ineinander übergeführt werden können.

51. Wieviele Muster entstehen bei der Färbung eines 3×3 Schachbretts mit (höchstens) c Farben? (2 Färbungen gelten als gleich, wenn sie durch Drehung oder Spiegelung ineinander übergeführt werden können.)

52. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{z \in G : z \circ g = g \circ z \ \ \forall g \in G\}$$

ein Normalteiler von G ist. (*Hinweis:* Betrachten Sie die Abbildung $G \longrightarrow S_G$, $g \longmapsto f_g$ mit $f_g(x) = g \circ x \circ g^{-1}$.)

53. Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe mit $a \circ a = e$ für alle $a \in G$ wobei e das neutrale Element von G ist. Zeigen Sie, dass dann $|G| = 2^n$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. (*Hinweis:* Nehmen Sie an, dass $|G|$ keine 2-er Potenz ist und verwenden sie den Satz von Sylow aus der Vorlesung.)