KV Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik

Blatt 7

40. Sei $(G, \circ)$ eine endliche, abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass für alle $a \in G$ gilt $a^{|G|} = e$ wobei e das neutrale Element der Gruppe ist.

41. Zeigen Sie, dass jede zyklische Gruppe abelsch ist.

42. Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe mit $|G| = p \in \mathbb{P}$. Zeigen Sie, dass die Gruppe dann zyklisch ist.

43. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und sei H eine nichtleere Teilmenge von G, sodass für alle $h_1, h_2 \in H$ auch $h_1 \circ h_2 \in H$. Muss dann H Trägermenge einer Untergruppe von $(G, \circ)$ sein?

44. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und sei H eine *endliche* nichtleere Teilmenge von G, sodass für alle $h_1, h_2 \in H$ auch $h_1 \circ h_2 \in H$. Muss dann H Trägermenge einer Untergruppe von $(G, \circ)$ sein?

45. Die Ordnung eines Gruppenelementes a ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$, sodass $a^n = 1$, siehe Bsp. 39. Seien G, H zwei endliche Gruppen und sei $\varphi : G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeigen Sie, dass für jedes $a \in G$ die Ordnung von a in G ein Vielfaches der Ordnung von $\varphi(a)$ in H ist.

46. Wieviele Gruppenendomorphismen von $(\mathbb{Z}_n, +)$ gibt es? Wieviele davon sind Automorphismen?

47. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\psi : G \longrightarrow G$, $a \longmapsto a^{-1}$ genau dann ein Homomorphismus ist, wenn die Gruppe $(G, \circ)$ abelsch ist.