

KV Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik

Blatt 5

35. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass das neutrale Element e dieser Gruppe eindeutig bestimmt ist. Zeigen Sie, dass es zu jedem Element $a \in G$ *genau* ein Element $\bar{a} \in G$ gibt mit

$$a \circ \bar{a} = \bar{a} \circ a = e.$$

36. Sind folgende Mengen G eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung “ $\circ$ ”?

(a) $G = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ und $a \circ b = a + b + ab$ für alle $a, b \in G$.

(b) G eine beliebige Menge mit $|G| \geq 2$ und $a \circ b = a$ für alle $a, b \in G$.

37. Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit $a \circ a = e$ für alle $a \in G$ (e ist das neutrale Element der Gruppe). Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine kommutative Gruppe ist.

38. Überprüfen Sie ob die Gruppe $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ zyklisch ist.

39. Sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe, dh. $|G| < \infty$. Zeigen Sie, dass es für jedes $a \in G$ eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $a^m = e$. (Definition: Die kleinste natürliche Zahl n mit $a^n = e$ nennt man die *Ordnung* von $a \in G$.)