KV Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik

Blatt 4

22. Finden Sie die kleinste natürliche Zahl x mit
$$x \equiv 5 \pmod{7}, \qquad x \equiv 7 \pmod{11}, \qquad x \equiv 3 \pmod{13}.$$

23. Finden Sie alle Lösungen in $\mathbb{Z}$ mit
$$x \equiv 3 \pmod{4}, \qquad x \equiv 8 \pmod{9}, \qquad x \equiv 1 \pmod{25}.$$

24. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Unter welchen Vorraussetzungen existiert eine Lösung der Gleichung
$$ax + by = c$$
in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$? Wie sehen die Lösungen im Falle der Lösbarkeit aus?

25. Bestimmen Sie eine Lösung $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ mit
$$12x + 15y + 20z = 1.$$

26. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}_p$ gilt
$$(a + b)^p = a^p + b^p.$$

27. Man nennt einen Ring $(R, +, \cdot)$ einen *Integritätsbereich* (oder man sagt der Ring ist *Nullteiler frei*) falls aus $a, b \in R$ mit $a \cdot b = 0$ folgt, dass $a = 0$ oder $b = 0$ ist. Zeigen Sie, dass der Ring $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ genau dann ein Integritätsbereich ist, wenn $m \in \mathbb{P}$ ist.

28. Sei $p \in \mathbb{P}$ und $\alpha \in \mathbb{N}$. Man zeige
$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$
und folgere daraus die Formel
$$\varphi(m) = m \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid m}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$