

KV Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik

Blatt 3

15. Seien $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Falls die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ in gekürzter Form vorliegen und falls $\text{ggT}(b, d) = 1$, dann ist auch der Bruch

$$\frac{ad + bc}{bd}$$

bereits gekürzt.

16. Zeigen Sie ohne Verwendung der Primfaktorenzerlegung, dass für $a, b \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\text{ggT}(a, b)\text{kgV}(a, b) = ab$$

gilt. (Hinweis: Zeigen Sie $ab | \text{ggT}(a, b)\text{kgV}(a, b)$ und $\text{kgV}(a, b) | \frac{ab}{\text{ggT}(a, b)}$ und folgern sie daraus obige Gleichung.)

17. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $a \equiv b \pmod{m}$ und $c \equiv d \pmod{m}$. Zeigen Sie, dass dann

(a) $a + c \equiv b + d \pmod{m}$ und $ac \equiv bd \pmod{m}$ und

(b) für alle $n \in \mathbb{N}$, $na \equiv nb \pmod{m}$ und $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ gilt.

18. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $na \equiv nb \pmod{m}$ und sei $d = \text{ggT}(n, m)$. Folgern Sie daraus, dass

$$a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$$

gilt. Kann man hier auch $a \equiv b \pmod{m}$ folgern?

19. Zeigen Sie, dass die Zahl $2^{23} - 1$ durch 47 teilbar ist.
20. Zeigen Sie: für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $3^{2n} - 2^n$ durch 7 teilbar.
21. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $5x \equiv 19 \pmod{23}$.