

# KV Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik

## Blatt 2

1. Sei  $a \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie: falls  $a^n - 1 \in \mathbb{P}$ , dann folgt  $a = 2$  und  $n \in \mathbb{P}$  oder  $n = 1$  und  $a - 1 \in \mathbb{P}$ .
2. Zeigen Sie: ausgenommen 3, 5, 7 gibt es keine drei Primzahlen der Form  $p, p+2, p+4$ .
3. Sei  $p \in \mathbb{P}$ ,  $p > 3$ . Zeigen Sie
  - (a)  $p$  ist von der Form  $6k + 1$  oder  $6k - 1$  und
  - (b) folgern Sie daraus, dass  $24 | (p^2 - 1)$ .
4. Zeigen Sie, dass der beliebige Durchschnitt von Idealen in  $\mathbb{Z}$  wieder ein Ideal in  $\mathbb{Z}$  ist.
5. Zeigen Sie (ohne Verwendung der Primfaktorenzerlegung): falls  $a|b$  und  $c|b$  und  $\text{ggT}(a, c) = 1$ , dann gilt  $ac|b$ .
6. Sei  $\text{ggT}(a, b) = 1$ . Zeigen Sie, dass  $\text{ggT}(a + b, a - b) = 1$  oder  $\text{ggT}(a + b, a - b) = 2$  gilt.
7. Zeigen Sie: seien  $a, b, c \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(a, b) = 1$  und  $c|(a + b)$ . Dann gilt
$$\text{ggT}(a, c) = \text{ggT}(b, c) = 1.$$
8. Seien  $a, b, x \in \mathbb{N}$  und  $u, v \in \mathbb{Z}$  so, dass  $x = ua + vb$ . Zeigen sie falls  $x|a$  und  $x|b$ , dann folgt  $x = \text{ggT}(a, b)$ .