KV Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik

Blatt 1

1. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:
   (a) Falls $a|b$ und $b|c$ dann folgt $a|c$.
   (b) Falls $a|b$ und $c|d$ dann folgt $ac|bd$.
   (c) Falls $a|b$ und $a|c$ dann folgt $a|(rb + sc)$ für alle $r, s \in \mathbb{Z}$.

2. Zeigen Sie: für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n|(n+1)\cdots(2n)$.

3. Sei $a \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$. Zeigen Sie: der kleinste positive Teiler von a der größer oder gleich 2 ist, ist eine Primzahl.

4. Beweisen Sie den Satz von Euklid der besagt, dass es unedlich viele Primzahlen gibt. (Hinweis: nehmen Sie an es gibt nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_n$ und betrachten Sie die Zahl $P := p_1 \ldots p_n + 1$.)

5. Für $n \in \mathbb{N}$ sei p_n die n–te Primzahl. Zeigen Sie die Ungleichung $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$.

6. Für $x \in \mathbb{R}^+$ sei $\pi(x) := \#\{p \in \mathbb{P} : p \leq x\}$. Aus dem Satz von Euklid folgt natürlich $\lim_{x\to\infty} \pi(x) = \infty$. Zeigen Sie mit Hilfe von Bsp. 5 die untere Abschätzung

$$\pi(x) \geq \frac{\log\log x}{\log 2}.$$

   (Der erste Mathematiker der die Funktion $\pi(x)$ genau untersuchte war Gauß. Er vermutete, dass $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$, dh. $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$. Diese Aussage wurde erst 1896 von J. Hadamard und unabhängig von ihm von C. de la Valle Poussin mit Hilfsmitteln aus der komlexen Analysis bewiesen. Das Resultat ist heute bekannt als der *Primzahlsatz*. Erst 1948 konnten A. Selberg und P. Erdős einen elementaren Beweis, dh., ohne komplexe Variablen, des Primzahlsatzes angeben.)

7. Sei $a \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: falls $a^n - 1 \in \mathbb{P}$, dann folgt $a = 2$ und $n \in \mathbb{P}$.

8. Zeigen Sie: ausgenommen $3, 5, 7$ gibt es keine drei Primzahlen der Form $p, p+2, p+4$.

9. Sei $p \in \mathbb{P}$, $p > 3$. Zeigen Sie
   (a) p ist von der Form $6k + 1$ oder $6k - 1$ und
   (b) folgern Sie daraus, dass $24|(p^2 - 1)$.

10. Zeigen Sie, dass der beliebige Durchschnitt von Idealen in $\mathbb{Z}$ wieder in Ideal in $\mathbb{Z}$ ist.