Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
13.Übungsblatt für den 20. Juni 2003

1. Sei $\mathbf{R} = (R, +, -, \cdot, 0, 1)$ ein kommutativer Ring mit Eins, sei I ein Ideal von $\mathbf{R}$, und sei $p \in R[x]$. Zeigen Sie, dass für alle $u, v \in R$ mit $u - v \in I$ auch $\overline{p}(u) - \overline{p}(v)$ in I liegt.

   Was bedeutet dieser Satz für $\mathbf{R} = \mathbb{Z}$?

2. Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Wieviele maximale Ideale hat der Ring $\mathbb{Z}_n$? Was sind die dazugehörigen einfachen Faktorringe?

3. Finden Sie das inverse Element von $x + 1 + (x^3 - 2)$ in $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2)$.

4. Sei $\mathbf{R} = (R, +, \cdot)$ ein Ring, und seien I, J Ideale von $\mathbf{R}$ mit $I \subseteq J \subseteq R$.
   (a) Gibt es dann immer einen Epimorphismus von $\mathbf{R}/J$ nach $\mathbf{R}/I$?
   (b) Gibt es dann immer einen Epimorphismus von $\mathbf{R}/I$ nach $\mathbf{R}/J$?
   (c) Wir definieren $J/I := \{j + I \mid j \in J\}$. Zeigen Sie, dass die Ringe $(\mathbf{R}/I)/(J/I)$ und $\mathbf{R}/J$ isomorph sind.

5. Finden Sie eine Multiplikation $*$ auf $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, sodass $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, *)$ ein Körper ist.

6. * Gibt es eine Multiplikation $*$ auf $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, sodass $(\mathbb{C} \times \mathbb{C}, +, *)$ ein Körper ist, und für alle $x, y, z \in \mathbb{C}$ gilt: $(x, 0) * (y, z) = (xy, xz)$? *Hinweis:* Wählen Sie ein $t \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus (\mathbb{C} \times \{0\})$. Zeigen Sie, dass es $a, b, c \in \mathbb{C} \times \{0\}$ gibt, sodass a, b, c nicht alle gleich $(0, 0)$ sind und $at^2 + bt + c = 0$. Warum gilt dann $t \in \mathbb{C} \times \{0\}$?