Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
12.Übungsblatt für den 12. Juni 2003

1. Zeigen Sie, dass ein Körper $(K, +, \cdot)$ nur die Ideale $\{0\}$ und K besitzt.

2. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring, und sei I ein Ideal von $(R, +, \cdot)$. Zeigen Sie, dass für alle $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ mit $x_1 - x_2 \in I$ und $y_1 - y_2 \in I$ auch $x_1 \cdot y_1 - x_2 \cdot y_2$ in I liegt.

3. Sei I das von $x^3 - 2$ erzeugte Ideal von $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$.
   (a) Finden Sie ein Repräsentantensystem für $\sim_I$!
   (b) Ist $\mathbb{R}[x]/I$ ein Körper?

4. Finden Sie Kern und Image des Ringhomomorphismus
$$\begin{array}{rccc} h & : & \mathbb{Q}[x] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & p & \longmapsto & \overline{p}(2 - \sqrt{7}). \end{array}$$

5. Finden Sie ein $p \in \mathbb{Q}[x]$, sodass
$$a \cdot p - b$$
in dem von c erzeugten Hauptideal liegt. Dabei seien
$$\begin{array}{rcl} a & := & -32 + 6\,x^2 + x^3 \\ b & := & -24 - 2\,x + 5\,x^2 + x^3 \\ c & := & 16 - 12\,x + x^3. \end{array}$$
Hinweis: Gehen Sie genauso vor, als ob a, b, c in $\mathbb{Z}$ lägen. Mathematica erleichtert die (aufwendigen) Rechnungen.