Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
11.Übungsblatt für den 5. Juni 2003

1. Finden Sie ein Polynom, das das von $4 - 4\,x + x^2$ und $-16 + 4\,x^2$ erzeugte Ideal von $\mathbb{Q}[x]$ erzeugt.

2. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass jedes Ideal von $K[x]$ ein Hauptideal ist.

Sei K ein Körper. Mit K^K bezeichnen wir die Menge aller Funktionen von K nach K. Diese Funktionen können wir wieder addieren und multiplizieren. Wir erhalten so den Ring $(K^K, +, \cdot)$. Wir betrachten folgende Abbildung Φ:

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & K[x] & \longrightarrow & K^K \\ & & (a_0, a_1, a_2, \ldots) & \longmapsto & \Phi((a_0, a_1, a_2, \ldots)), \end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{rcccc} \Phi((a_0, a_1, a_2, \ldots)) & : & K & \longrightarrow & K \\ & & k & \longmapsto & \sum_{i=0}^{\deg a} a_i k^i. \end{array}$$

3. Was ist das Nullelement, und was ist das Einselement von $(K^K, +, \cdot)$?

4. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in K[x]$ gilt:

$$\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b).$$

5. (a) Für welche Körper ist Φ injektiv?
   (b) Für welche Körper ist Φ surjektiv?