

Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
11. Übungsblatt für den 5. Juni 2003

1. Finden Sie ein Polynom, das das von $4 - 4x + x^2$ und $-16 + 4x^2$ erzeugte Ideal von $\mathbb{Q}[x]$ erzeugt.
2. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass jedes Ideal von $K[x]$ ein Hauptideal ist.

Sei K ein Körper. Mit K^K bezeichnen wir die Menge aller Funktionen von K nach K . Diese Funktionen können wir wieder addieren und multiplizieren. Wir erhalten so den Ring $(K^K, +, \cdot)$. Wir betrachten folgende Abbildung Φ :

$$\begin{array}{ccc} \Phi & : & K[x] \longrightarrow K^K \\ & & (a_0, a_1, a_2, \dots) \longmapsto \Phi((a_0, a_1, a_2, \dots)), \end{array}$$

wobei

$$\begin{array}{ccc} \Phi((a_0, a_1, a_2, \dots)) & : & K \longrightarrow K \\ & & k \longmapsto \sum_{i=0}^{\deg a} a_i k^i. \end{array}$$

3. Was ist das Nullelement, und was ist das Einselement von $(K^K, +, \cdot)$?
4. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in K[x]$ gilt:

$$\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b).$$

5. (a) Für welche Körper ist Φ injektiv?
(b) Für welche Körper ist Φ surjektiv?