Einführung in die Algebra
10.Übungsblatt für den 30. Mai 2003

1. Berechnen Sie $r(1, t, n)$ für alle $t, n \in \mathbb{N}$.

2. Zeigen Sie $r(2, 3, 3) \leq 17$. (Hinweis: Betrachten Sie den Beweis von $r(2, 2, 3) \leq 6$, und verwenden Sie die gleiche Beweisidee nocheinmal.)

3. Zeigen Sie den folgenden Satz von Schur (1916):

   > Für jede Zahl $t \in \mathbb{N}$ gibt es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass es für jede Partition von $\{1, 2, \ldots, N\}$ in t Klassen eine Klasse gibt, die zwei Elemente x, y $(x \neq y)$ und deren Summe $x + y$ enthält.

   Lösen Sie zuerst den Spezialfall $t = 2$!

4. (Schubfachschluss [1])

   (a) Seien $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass es $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ und $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $k < l$ gibt, sodass

   $$\sum_{i=k+1}^{l} a_i$$

   ein Vielfaches von n ist.

   (b) Zeigen Sie, dass es unter jeder Auswahl von $n + 1$ Zahlen im Bereich $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ zwei Zahlen gibt, die relativ prim sind.

   (c) Zeigen Sie, dass es unter jeder Auswahl von $n + 1$ Zahlen im Bereich $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ zwei Zahlen gibt, von denen eine die andere teilt.

5. (Bonusbeispiel zur Analyse des Beweises des Lemmas im Beweis des Satzes von Ramsey nach [2, p.1335])
   Im Beweis des Lemmas haben wir die $t(n-1)+1$-elementige Teilmenge Y in t Klassen $M_{f_1}, M_{f_2}, \ldots, M_{f_t}$ zerteilt.

   (a) Kann man garantieren, dass für $i \neq j$ die Menge $M_{f_i} \cap M_{f_j}$ leer ist?

   (b) Welche Elemente kommen im Durchschnitt $M_{f_i} \cap M_{f_j}$ vor?

   (c) Begründen Sie, dass es ein $r \in \{1, 2, \ldots, t\}$ gibt, sodass $|M_{f_r}| \geq n$, und alle p-elementigen Teilmengen von M_{f_r} gleiche Farbe haben.

Am 30. Mai 2003 ist von **8:30** bis **9:15** Vorlesung; von **9:15** bis **10:00** werden die Beispiele dieses Übungszettels besprochen. (Achtung: auf der letzten Version war die Zeitangabe **falsch**.)

Literatur

[1] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Springer Berlin-Heidelberg, 1998.

[2] Jaroslav Nešetřil. Ramsey theory. In *Handbook of combinatorics, Vol. 2*, pages 1331–1403. Elsevier, Amsterdam, 1995.