Einführung in die Algebra
9.Übungsblatt für den 22. Mai 2003

1. Sei $\mathbf{G}$ eine Gruppe, und sei H ein Normalteiler von $\mathbf{G}$.

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$C_G(H) := \{g \in G \,|\, \forall h \in H : g \cdot h = h \cdot g\}$$
   wieder ein Normalteiler von G ist. ($C_G(H)$ heißt der *Zentralisator von* H.)

   (b) Zeigen Sie, dass $C_G(H)$ genau dann gleich G ist, wenn H eine Untergruppe des Zentrums $Z(\mathbf{G}) = \{z \in G \,|\, \forall g \in G : z \cdot g = g \cdot z\}$ ist.

   (c) Finden Sie einen Homomorphismus von $\mathbf{G}$ in die Gruppe $(S_H, \circ)$, dessen Kern $C_G(H)$ ist.

2. Sei $\mathbf{G}$ eine Gruppe, die auf der Menge X operiert, und sei $\xi \in X$. Zeigen Sie, dass die Untergruppe $\operatorname{stab} \xi := \{g \in G \,|\, g * \xi = \xi\}$ genau dann ein Normalteiler ist, wenn folgendes gilt:
   $$\forall h \in G \,:\, \operatorname{stab} \xi \subseteq \operatorname{stab} (h * \xi).$$

3. In der Gruppe $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2, +)$ gilt $z + z = 0$ für alle $z \in \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$. Zeigen Sie, dass jede Gruppe $(G, \cdot)$, in der $g \cdot g = 1$ für alle $g \in G$ gilt, abelsch sein muss.

4. (a) Sei (V, E, I) ein Graph. Zeigen Sie:
   $$|I| = \sum_{v \in V} \operatorname{Grad}(v).$$

   (b) Sei (V, E, I) ein Graph. Zeigen Sie:
   $$|I| = 2 \cdot |E|.$$

   (c) Zeigen Sie, dass ein Graph eine gerade Anzahl von Knoten ungeraden Grades hat.

5. [1, p.59] Sei G ein einfacher planarer Graph mit v Knoten, $v \geq 3$, und e Kanten. Zeigen Sie $e \leq 3v - 6$.

6. [1, p.59] Zeigen Sie, dass der Graph K_5 (der vollständige Graph mit 5 Knoten) nicht planar ist.

Literatur

[1] M. Aigner and G. M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Springer Berlin-Heidelberg, 1998.