Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
8.Übungsblatt für den 15. Mai 2003

1. Wir färben die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks mit den Farben rot, blau, und gelb.

   (a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Ecken zu färben, wenn wir zwei Färbungen als gleich ansehen, wenn sie durch eine Drehung des Fünfecks ineinander übergeführt werden können?

   (b) Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Ecken zu färben, wenn wir zwei Färbungen als gleich ansehen, wenn sie durch Drehungen und eine Spiegelungen des Fünfecks ineinander übergeführt werden können. (Hinweis: es gibt jetzt 10 Symmetrieoperationen.)

2. Wir färben Flächen eines Würfels.

   (a) Wieviele verschiedene Färbungen gibt es, wenn wir zwei Farben nehmen und zwei Färbungen als gleich betrachten, wenn sie durch eine Symmetrieoperation des Würfels ineinander übergeführt werden können. Dabei operiert auf den Flächen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ des Würfels die Untergruppe der S_6, die von $(4, 2, 3, 5), (1, 2, 6, 5), (3, 1, 4, 6)$ erzeugt wird. Ihre Elemente entnehmen Sie dem folgenden Dialog mit GAP (steht für Groups - Algorithms -Programming, ein in Aachen und St. Andrews entwickeltes, im wesentlichen frei verfügbares Gruppentheoriesystem [1]):

```
gap> G := Group ((4,2,3,5), (1,2,6,5), (3,1,4,6));
Group([ (2,3,5,4), (1,2,6,5), (1,4,6,3) ])
gap> Size (G);
24
gap> AsList (G);
[ (), (2,3,5,4), (2,4,5,3), (2,5)(3,4), (1,2)(3,4)(5,6), (1,2,3)(4,6,5),
  (1,2,4)(3,6,5), (1,2,6,5), (1,3,2)(4,5,6), (1,3,6,4), (1,3)(2,5)(4,6),
  (1,3,5)(2,6,4), (1,4,2)(3,5,6), (1,4,6,3), (1,4)(2,5)(3,6),
  (1,4,5)(2,6,3),
  (1,5,6,2), (1,5,4)(2,3,6), (1,5,3)(2,4,6), (1,5)(2,6)(3,4), (1,6)(3,4),
  (1,6)(2,3)(4,5), (1,6)(2,4)(3,5), (1,6)(2,5) ]
```

   (b) Wieviele verschiedene Färbungen gibt es mit 3, wieviele mit n Farben?

3. Auf wieviele verschiedene Arten können Sie die Ecken eines Quadrats mit drei Farben färben, wenn jede Farbe wirklich vorkommen soll? Dabei sind zwei Färbungen gleich, wenn sie durch eine Symmetrieoperation des Quadrats ineinander übergeführt werden können.

```
gap> G := Group ((1,2,3,4), (1,2) (3,4));
Group([ (1,2,3,4), (1,2)(3,4) ])
gap> Size (G);
8
gap> AsList (G);
[ (), (2,4), (1,2)(3,4), (1,2,3,4), (1,3), (1,3)(2,4), (1,4,3,2), (1,4)(2,3) ]
```

4. Auf wieviele verschiedene Arten können Sie die Ecken eines Quadrats mit drei Farben färben, wenn zwei Färbungen dann als gleich angesehen werden, wenn sie durch Vertauschung der Farben ineinander übergeführt werden können? Das Quadrat dürfen wir dabei nicht bewegen. Außerdem müssen bei einer Färbung nicht alle 3 Farben vorkommen. *Hinweis:* Sie brauchen eine neue Gruppenoperation. Es operiert jetzt die S_3 auf den Färbungen. Aber wie?

```
gap> G := Group ((1,2), (1,2,3));
Group([ (1,2), (1,2,3) ])
gap> AsList (G);
[ (), (2,3), (1,2), (1,2,3), (1,3,2), (1,3) ]
```

Literatur

[1] The GAP Group, Aachen, St. Andrews. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.1*, 1999. (`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap`).