Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
7.Übungsblatt für den 8. Mai 2003

1. Finden Sie alle Gruppenendomorphismen von $(\mathbb{Z}_n, +)$! Wieviele davon sind Automorphismen?

2. Sei **G** die Gruppe $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2, +)$. Diese Gruppe ist nach dem Satz von Cayley in die Gruppe $(S_6, \circ)$ einbettbar. Geben Sie einen injektiven Homomorphismus an!

3. Sei p eine Primzahl. Finden Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p, +)$.

4. Finden Sie alle Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$.

5. Zeigen Sie, dass ein Homomorphismus, der die Eigenschaft

$$\text{für alle } x \in G : h(x) = 1_H \Rightarrow x = 1_G$$

   erfüllt, injektiv ist.

6. Sei p eine ungerade Primzahl, und sei $x \in \mathbb{N}$ so, dass $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Zeigen Sie $p \equiv 1 \pmod{4}$. *Hinweis:* Betrachten Sie die Gruppe $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$.

7. [1] Let G be a group with exactly three subgroups. Show that G is isomorphic to $(\mathbb{Z}_{p^2}, +)$, where p is a prime.

8. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe, und seien H_1, H_2 Trägermengen von Untergruppen von $(G, \cdot)$, sodass $G = H_1 \cup H_2$. Zeigen Sie, dass $H_1 = G$ oder $H_2 = G$.

9. Sei $(G, \cdot)$ eine endliche Gruppe mit $|G|$ gerade. Zeigen Sie, dass es ein $x \in G$ mit $x^2 = 1$, $x \neq 1$ gibt.

Literatur

[1] D. J. S. Robinson. *An Introduction to Abstract Algebra.* Walter de Gruyter, Berlin – New York, www.deGruyter.com, 2003.