Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
6.Übungsblatt für den 10. April 2003

1. Gegeben sei folgender Ring mit Eins $(R, +, -, \cdot, 0, 1)$, wobei R die Menge aller 2×2-Matrizen über $\mathbb{Z}_3$ und die Verknüpfungen die entsprechenden Matrixoperationen sind. Bestimmen Sie die Anzahl der invertierbaren Elemente dieses Rings.

2. (a) Sei $(G, \cdot, i, \mathsf{e})$ eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in G$ die Gleichung $a \cdot x = b$ genau eine Lösung hat.

   (b) Sei $(G, \cdot, i, \mathsf{e})$ eine Gruppe. Benutzen Sie Ihr Wissen aus Punkt (a), um zu zeigen, dass $i(\mathsf{e}) = \mathsf{e}$, und dass für alle $x, y \in G$ gilt:

$$i(x \cdot y) = i(y) \cdot i(x).$$

3. Finden Sie eine Menge H, eine Funktion $\cdot$ von $H \times H$ nach H, eine Funktion i von H nach H, und ein Element $\mathsf{e} \in H$, sodass alle folgende Eigenschaften erfüllt sind:

   (a) Für alle $x, y, z \in H$ gelten: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$, $\mathsf{e} \cdot x = x$, $x \cdot i(x) = \mathsf{e}$.

   (b) $(H, \cdot, i, \mathsf{e})$ ist keine Gruppe.

4. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der acht linearen Abbildungen, die das Quadrat mit den Eckpunkten $(-1, -1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$ in sich selbst überführen.

5. Wir betrachten alle Abbildungen $\{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$, die sich als Hintereinanderausführung der Funktionen $x \to i \cdot x$ und $x \to \overline{x}$ schreiben lassen. (Dabei ist $\overline{a + bi} := a - bi$).

   (a) Wieviele Funktionen lassen sich daraus zusammenbauen?

   (b) Was machen diese Funktionen mit den Punkten $\{-1 - i, 1 - i, 1 + i, -1 + i\}$?

6. * Als "Wort" betrachten wir eine endliche Folge von Buchstaben aus $\{a, b, c, \ldots, z\}$. Diese Worte verknüpfen wir durch Aneinanderhängen, also z.B. $afc * gff = afcgff$. Für manche Worte w_1, w_2 gilt $w_1 * w_2 = w_2 * w_1$, zum Beispiel $aaa * aa = aa * aaa$, oder, komplizierter, $avd * avdavd = avdavd * avd$.

   Beschreiben Sie alle Wortpaare (w_1, w_2), sodass $w_1 * w_2 = w_2 * w_1$.