

**Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik**  
**6. Übungsblatt für den 10. April 2003**

1. Gegeben sei folgender Ring mit Eins  $(R, +, -, \cdot, 0, 1)$ , wobei  $R$  die Menge aller  $2 \times 2$ -Matrizen über  $\mathbb{Z}_3$  und die Verknüpfungen die entsprechenden Matrixoperationen sind. Bestimmen Sie die Anzahl der invertierbaren Elemente dieses Rings.
2. (a) Sei  $(G, \cdot, i, \mathbf{e})$  eine Gruppe. Zeigen Sie, dass für alle  $a, b \in G$  die Gleichung  $a \cdot x = b$  genau eine Lösung hat.  
(b) Sei  $(G, \cdot, i, \mathbf{e})$  eine Gruppe. Benutzen Sie Ihr Wissen aus Punkt (a), um zu zeigen, dass  $i(\mathbf{e}) = \mathbf{e}$ , und dass für alle  $x, y \in G$  gilt:

$$i(x \cdot y) = i(y) \cdot i(x).$$

3. Finden Sie eine Menge  $H$ , eine Funktion  $\cdot$  von  $H \times H$  nach  $H$ , eine Funktion  $i$  von  $H$  nach  $H$ , und ein Element  $\mathbf{e} \in H$ , sodass alle folgende Eigenschaften erfüllt sind:  
(a) Für alle  $x, y, z \in H$  gelten:  $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ ,  $\mathbf{e} \cdot x = x$ ,  $x \cdot i(x) = \mathbf{e}$ .  
(b)  $(H, \cdot, i, \mathbf{e})$  ist keine Gruppe.
4. Bestimmen Sie die Matrixdarstellung der acht linearen Abbildungen, die das Quadrat mit den Eckpunkten  $(-1, -1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(-1, 1)$  in sich selbst überführen.
5. Wir betrachten alle Abbildungen  $\{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$ , die sich als Hintereinanderausführung der Funktionen  $x \rightarrow i \cdot x$  und  $x \rightarrow \bar{x}$  schreiben lassen. (Dabei ist  $\overline{a + bi} := a - bi$ ).  
(a) Wieviele Funktionen lassen sich daraus zusammenbauen?  
(b) Was machen diese Funktionen mit den Punkten  $\{-1 - i, 1 - i, 1 + i, -1 + i\}$ ?

6. \* Als "Wort" betrachten wir eine endliche Folge von Buchstaben aus  $\{a, b, c, \dots, z\}$ . Diese Worte verknüpfen wir durch Aneinanderhängen, also z.B.  $afc * gff = afcgff$ . Für manche Worte  $w_1, w_2$  gilt  $w_1 * w_2 = w_2 * w_1$ , zum Beispiel  $aaa * aa = aa * aaa$ , oder, komplizierter,  $avd * avdavd = avdavd * avd$ .  
Beschreiben Sie alle Wortpaare  $(w_1, w_2)$ , sodass  $w_1 * w_2 = w_2 * w_1$ .