Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
4.Übungsblatt für den 27. März 2003

1. Finden Sie alle Lösungen in $\mathbb{Z}$ von

$$\begin{aligned} x &\equiv 26 \pmod{26} \\ x &\equiv 82 \pmod{84} \\ x &\equiv 124 \pmod{126} \end{aligned}$$

2. Seien $a, b, c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

   (a) Bestimmen Sie, unter welcher Bedingung die Gleichung

   $$a \cdot x + b \cdot y = c$$

   in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ lösbar ist.

   (b) Eruieren Sie unter dieser Voraussetzung die Lösungsmenge.

3. Bestimmen Sie alle Lösungen in $\mathbb{Z}^3$ von

$$12x + 15y + 20z = 1.$$

4. [1] Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl n die Zahl $n^5 - n$ ein Vielfaches von 30 ist.

5. (a) Überprüfen Sie, welche Eigenschaften eines Ringes für $(\mathcal{P}(U), \triangle, ^c, \cap, \emptyset, U)$ erfüllt sind.

   (b) Wählen Sie die Operation $-$ so, dass $(\mathcal{P}(U), \triangle, -, \cap, \emptyset, U)$ ein Ring ist.

6.* Eine Funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ heißt kompatibel genau dann, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ mit $x_1 \neq x_2$ der Quotient $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ ganzzahlig ist. Zeigen Sie, dass die Menge der kompatiblen Funktionen von $\mathbb{Z}$ überabzählbar ist.

Literatur

[1] R. Remmert and P. Ullrich. *Elementare Zahlentheorie.* Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.