Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
3.Übungsblatt für den 20. März 2003

1. Bestimmen Sie für $a = 254$ und $b = 120$ den $\mathrm{ggT}(a, b)$ und zwei ganze Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$, so dass

$$\mathrm{ggT}(a, b) = u \cdot a + v \cdot b.$$

2. Zeigen Sie ohne Verwendung der Primfaktorzerlegung, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{kgV}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, b) = a \cdot b.$$

Hinweis: Zeigen Sie dazu $ab | \mathrm{ggT}(a, b) \cdot \mathrm{kgV}(a, b)$ und $\mathrm{kgV}(a, b) | \frac{ab}{\mathrm{ggT}(a,b)}$.

3. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

   (a) $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a, b), c) = \mathrm{ggT}(a, \mathrm{ggT}(b, c))$

   (b) $\mathrm{ggT}(\mathrm{kgV}(a, b), c) = \mathrm{kgV}(\mathrm{ggT}(a, c), \mathrm{ggT}(b, c))$

4. (a) Lösen Sie die Gleichung

$$207x \equiv 18 \pmod{1989}$$

   in $\mathbb{Z}$!

   (b) Bestimmen Sie für alle $a, c \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}$, wieviele Lösungen in $\{0, 1, \ldots, c-1\}$ die Gleichung $a \cdot x \equiv b \pmod{c}$ hat.

5. (a) Lösen Sie folgendes System von Kongruenzen!

$$x \equiv 22 \pmod{26}$$
$$x \equiv 26 \pmod{37}$$

   (b) Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Wieviele Lösungen in $\{0, 1, \ldots, m_1 \cdot m_2 - 1\}$ hat folgendes System?

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$$
$$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$$