Einführung in die Algebra und Diskrete Mathematik
2.Übungsblatt für den 13. März 2003

1. [2, p. 28] Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ usw. Zeigen Sie
$$p_n \leq 2^{(2^{n-1})}.$$
Hinweis: Euklids Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt ([1, Buch IX, Satz 20], 270 v.Chr.) beruht auf folgender Überlegung: Seien $q_1, q_2, \ldots, q_n$ Primzahlen. Dann ist der kleinste positive Teiler von $q_1 \cdot q_2 \cdots q_n + 1$ eine Primzahl, die von allen q_i verschieden ist.

2. Welche Zahlen $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 2$ erfüllen folgende Eigenschaft?

   Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $q|ab$ gilt: $q|a$ oder es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $q|b^n$.

3. Seien $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gekürzt, und die Nenner b und d teilerfremd sind, so ist auch der Bruch $\frac{ad+bc}{bd}$ gekürzt.

4. Seien $a, b, x \in \mathbb{N}$ und $u, v \in \mathbb{Z}$ so, dass
$$x = ua + vb.$$
Zeigen Sie: Wenn x sowohl a als auch b teilt, so gilt $x = \mathrm{ggT}(a, b)$.

5. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Wir nehmen an $a|c$ und $b|c$. Zeigen Sie ohne Verwendung der Primfaktorzerlegung $ab|c$.

6. Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, usw. Zeigen Sie, ohne die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung zu verwenden, dass folgendes gilt: Wenn
$$\begin{aligned} a &= \prod p_i^{\alpha_i} \\ b &= \prod p_i^{\beta_i}, \end{aligned}$$
wobei $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}_0$, und fast alle $\alpha_i, \beta_i = 0$ sind, dann gilt $a|b$ genau dann, wenn für alle i $\alpha_i \leq \beta_i$ ist. (Zeigen Sie, dass diese Aussage für alle Primfaktorzerlegungen von a und b gilt. Folgt daraus die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung?)

Literatur

[1] Euklid. *Die Elemente*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1991. Buch I–XIII. [Book I–XIII], Based on Heiberg's text, Translated from the Greek and edited by Clemens Thaer.

[2] R. Remmert and P. Ullrich. *Elementare Zahlentheorie*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1987.