KAPITEL 3

Ausgewählte Kapitel der Diskreten Mathematik

1. Das Färben von Landkarten

DEFINITION 3.1. Ein *Graph* ist ein Tripel (V, E, I), wobei V, E endliche Mengen sind, $V \neq \emptyset$, $I \subseteq V \times E$, und für alle $e \in E$ die Menge $\{v \in V \mid (v, e) \in I\}$ zweielementig ist. Die Elemente aus V sind die *Knoten*, die Elemente aus E die *Kanten* des Graphen.

Falls $(v, e) \in I$, dann sagen wir, dass die Kante e mit dem Knoten v inzidiert. Falls $x, y \in V$ so sind, dass es ein $e \in E$ gibt, sodass $(x, e) \in I$ und $(y, e) \in I$, dann sagen wir, dass xy eine Kante des Graphen ist.

Ein Graph heißt *einfach*, wenn zwischen zwei Knoten immer höchstens eine Kante verläuft.

Unsere Definition eines Graphen lässt keine Schleifen, also Kanten mit dem gleichen Anfangs- und Endpunkt zu.

DEFINITION 3.2. Sei (V, E, I) ein Graph, und sei v ein Knoten des Graphen. Dann ist der *Grad* von v definiert als die Anzahl der Kanten, die mit v inzidieren.

ÜBUNGSAUFGABEN 3.3.

(1) Sei (V, E, I) ein Graph. Zeigen Sie:
$$|I| = \sum_{v \in V} \mathrm{Grad}\,(v).$$
(2) Sei (V, E, I) ein Graph. Zeigen Sie:
$$|I| = 2 \cdot |E|.$$
(3) Zeigen Sie, dass ein Graph eine gerade Anzahl von Knoten ungeraden Grades hat.

DEFINITION 3.4. Ein Graph ist *planar*, wenn er sich in $\mathbb{R}^2$ "überschneidungsfrei zeichnen lässt".

DEFINITION 3.5. Ein ebener Graph ist ein Paar (G, Z), wobei G ein planarer Graph und Z eine überschneidungsfreie Zeichnung von G in $\mathbb{R}^2$ ist.

DEFINITION 3.6. Ein Graph (V, E, I) ist *zusammenhängend*, wenn es für alle $v, w \in V$ mit $v \neq w$ ein $n \in \mathbb{N}$ und $v_0, v_1, \ldots, v_n \in V$ gibt sodass $v = v_0$, $v_n = w$, und $v_i v_{i+1}$ für alle $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ eine Kante des Graphen ist.

DEFINITION 3.7. Sei (V, E, I) ein Graph. Eine Folge $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ von Elementen von V heißt *Zyklus*, wenn folgendes gilt: $n \geq 2$, alle x_i sind voneinander verschieden und es gibt $e_1, \ldots, e_n \in E$, sodass alle e_i voneinander verschieden sind, weiters für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ die Kante e_i eine Kante zwischen x_i und x_{i+1} ist, und außerdem e_n eine Kante zwischen x_n und x_1 ist.

SATZ 3.8 (Euler). *Sei G ein zusammenhängender, ebener Graph mit v Knoten und e Kanten, der die Ebene in f Flächen unterteilt. Dann gilt $v - e + f = 2$.*

SATZ 3.9. *Sei G ein einfacher planarer Graph. Dann hat G einen Knoten, dessen Grad höchstens 5 ist.*

ÜBUNGSAUFGABEN 3.10.

(1) [**Aigner and Ziegler, 1998**, p.59] Sei G ein einfacher planarer Graph mit $v \geq 3$ Knoten und e Kanten. Dann gilt $e \leq 3v - 6$.
(2) [**Aigner and Ziegler, 1998**, p.59] Zeigen Sie, dass die Graphen K_5 (der vollständige Graph mit 5 Knoten) und $K_{3,3}$ (der vollständige bipartite Graph mit 2 mal 3 Knoten) nicht planar sind.

SATZ 3.11. *Sei G ein einfacher ebener Graph. Dann kann man die Knoten von G so mit 6 Farben färben, dass keine zwei Knoten, zwischen denen eine Kante verläuft, die gleiche Farbe haben.*

Es reichen sogar 4 (statt 6) Farben (*Vierfarbensatz*).

2. Der Satz von Ramsey

Für eine Menge X und eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $\binom{X}{p}$ die Menge aller p-elementigen Teilmengen von X. Eine *Partition* einer Menge U in t Teilmengen ist (in diesem Kapitel) eine Folge $(A_1, A_2, \ldots, A_t)$ von Teilmengen von U, sodass $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t = U$ ist, und für alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ mit $i \neq j$ die Menge $A_i \cap A_j$ leer ist.

SATZ 3.12. *Seien $p, t, n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass folgendes erfüllt ist:*

> *Für jede Menge X mit $|X| \geq N$ und jede Partition von $\binom{X}{p}$ in t Teilmengen der Form*
> $$\binom{X}{p} = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_t$$
> *gibt es eine n-elementige Teilmenge Y von X und ein $j \in \{1, 2, \ldots, t\}$, sodass $\binom{Y}{p} \subseteq A_j$. (Das heißt, dass alle alle p-elementigen Teilmengen von Y in der gleichen Klasse der Partition sind).*

Äquivalent ist:

SATZ 3.13. *Seien $p, t, n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, sodass folgendes erfüllt ist:*

> *Sei X eine Menge mit N Elementen. Wir färben jede p-elementige Teilmenge von X mit einer von t Farben. Dann gibt es eine Menge $Y \subseteq X$ mit n Elementen, sodass alle p-elementigen Teilmengen von Y die gleiche Farbe haben.*

Das kleinste N, für das die Aussage erfüllt ist, bezeichnen wir mit $r(p, t, n)$ (Ramsey-Zahl).

Wir betrachten Spezialfälle:

- $p = 1, n = 2$: Es gibt ein N, sodass für jede Menge X mit N Elementen folgendes gilt: Wenn man die Elemente von X in t Klassen aufteilt, so gibt es zwei Elemente, die in der gleichen Klasse liegen. Daraus sehen wir $r(1, t, 2) = t + 1$. (Schubfachprinzip)

ÜBUNGSAUFGABEN 3.14.

(1) Berechnen Sie $r(1, t, n)$ für alle $t, n \in \mathbb{N}$.

Weitere Spezialfälle:

- $p = 2, t = 2, n = 3$: Man weiß, dass $r(2, 2, 3) = 6$ ist. Das heißt:
  > Wenn man jede 2-elementige Teilmengen einer 6-elementigen Menge entweder rot oder blau färbt, dann gibt es drei Elemente a, b, c, sodass $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ und $\{b, c\}$ die gleiche Farbe haben.

  Das kann man auch so formulieren:
  > Sei K_6 der vollständige Graph mit 6 Knoten und $\binom{6}{2}$ Kanten. Wir färben jede Kante entweder rot oder blau. Dann enthält der Graph ein einfärbiges Dreieck, also drei Knoten x, y, z, sodass xy, xz und yz die gleiche Farbe haben.

ÜBUNGSAUFGABEN 3.15.

(1) Zeigen Sie $r(2, 2, 3) \leq 6$.
(2) Zeigen Sie $r(2, 3, 3) \leq 17$.
(3) Zeigen Sie $r(2, k, 3) \leq (r(2, k-1, 3) - 1) \cdot k + 2$.
(4) (Lästiger Spezialfall I) Berechnen Sie $r(p, t, p)$!
(5) (Lästiger Spezialfall II) Sei $p \leq n$. Was ist $r(p, 1, n)$?
(6) (Lästiger Spezialfall III) Sei $p > n$. Was ist $r(p, t, n)$?

LEMMA 3.16. *Seien $p, t \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass es für jede Färbung der p-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, N\}$ mit t Farben eine n-elementige Teilmenge Y von $\{1, 2, \ldots, N\}$ gibt, sodass alle p-elementigen Teilmengen von Y die gleiche Farbe haben.*

(2) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $M \in \mathbb{N}$, sodass folgendes gilt: für jede M-elementige Teilmenge X der natürlichen Zahlen und für jede Färbung der p-elementigen Teilmengen von X mit t Farben gibt es eine n-elementige Teilmenge Y von X, sodass alle p-elementigen Teilmengen von Y, die das gleiche minimale Element haben, die gleiche Farbe haben.*

Beweis: (2) $\Rightarrow$ (1): Wir fixieren $n \in \mathbb{N}$. Wegen (2) gibt es ein M, sodass es für jede Färbung der p-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, M\}$ mit t Farben eine $t(n-1)+1$-elementige Teilmenge Y von $\{1, 2, \ldots, M\}$ gibt, sodass alle p-elementigen Teilmengen von Y, die das gleiche minimale Element haben, die gleiche Farbe haben. Wir behaupten, dass $N := M$ in (1) das Gewünschte leistet. Wir fixieren eine Färbung der p-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, M\}$ mit t Farben, und wählen eine $(t(n-1)+1)$-elementige Teilmenge Y wie oben. Für jede Farbe f der t Farben definieren wir die Menge $M_f := \{x \in Y \mid$ jede p-elementige Teilmenge von Y mit x als minimalem Element hat die Farbe $f\}$. Eine der Mengen M_f hat zumindest n Elemente. Alle p-elementigen Teilmengen von M_f haben dann die gleiche Farbe. □

Beweis des Satzes von Ramsey: Wir definieren ein Prädikat

$$G(p, t, n)$$

dadurch, dass $G(p, t, n)$ wahr ist, wenn der Satz von Ramsey für p, t, n gilt, das heißt, wenn es ein N gibt, sodass für alle N-elementigen Mengen und alle Färbungen der p-elementigen Teilmengen .... Wir wissen, dass z.B. $G(2, 2, 3)$ wahr ist.

Wir beweisen jetzt, dass $G(p, t, n)$ für alle $p, t, n \in \mathbb{N}$ gilt, durch Induktion nach p.

- $p = 1$: Wir fixieren $t, n \in \mathbb{N}$. Dann leistet $N := t(n-1)+1$ das Gewünschte.
- Wir fixieren $p \geq 2$ und $t \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun, dass die Eigenschaft (2) aus Lemma 3.16 gilt. Wir zeigen diese Eigenschaft durch Induktion nach n.
  - Für $n \leq p$ leistet $M := p$ das Gewünschte.
  - Wir fixieren $n > p$. Mit der Induktionsvoraussetzung produzieren wir ein M für $n-1$. Wir behaupten nun, dass

    $$M' := 1 + r(p-1, t, M)$$

    das Gewünschte leistet. Wir fixieren dazu eine Färbung der p-elementigen Teilmengen von $X = \{1, 2, \ldots, M'\}$ mit t Farben.

    Wir geben nun jeder $p-1$-elementigen Teilmenge Z von $X \setminus \{1\}$ die Farbe von $\{1\} \cup Z$. Wir finden dann (wegen der Induktionsvoraussetzung der Induktion nach p) eine M-elementige Teilmenge A von

$X \setminus \{1\}$, sodass alle $p-1$-elementigen Teilmengen von A die gleiche Farbe haben.
Wir wählen nun nach Induktionsvoraussetzung (der Induktion nach n) eine $(n-1)$-elementige Teilmenge B von A, sodass alle p-elementigen Teilmengen von B mit dem gleichen minimalen Element die gleiche Farbe haben.
Wir behaupten, dass $B \cup \{1\}$ das Gewünschte leistet. Wir wählen dazu zwei p-elementige Teilmengen P_1, P_2 von $B \cup \{1\}$ mit dem gleichen minimalen Element. Ist dieses Element 1, so haben P_1, P_2 die gleiche Farbe, da alle p-elementigen Teilmengen von $A \cup \{1\}$, die 1 enthalten, die gleiche Farbe haben.
Ist dieses Element nicht 1, dann sind P_1, P_2 beide p-elementige Teilmengen von B und haben daher die gleiche Farbe. $\square$

SATZ 3.17 (Erdős-Szekeres). *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine Zahl N, sodass jede Menge von N Punkten in der Ebene, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, n Punkte enthält, die die Eckpunkte eines konvexen n-Ecks sind.*

Hinweis zum Beweis: Für $n = 4$ funktioniert $N := 5$. Für $n > 4$ kann man $N := r(4, 2, n)$ wählen.

SATZ 3.18. *Sei $t \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein N, sodass es für jede Gruppe $\mathbf{G}$ mit mehr als N Elementen und jede Aufteilung von G in t Klassen eine Klasse gibt, die drei verschiedene Elemente x, y, z mit $x \neq 1$, $y \neq 1$, $z \neq 1$ und $z = x \cdot y$ enthält.*

Hinweis zum Beweis: $N := r(2, t, 3)$. Sei $G = \{x_1, \ldots, x_{N'}\}$ Wir färben die Menge $\{x_i, x_j\}$ mit der Farbe von $x_{\min(i,j)}^{-1} \cdot x_{\max(i,j)}$. $\square$

Literaturverzeichnis

[Aigner and Ziegler, 1998] Aigner, M. and Ziegler, G. M. (1998). *Proofs from THE BOOK*. Springer Berlin-Heidelberg.

[Buchberger, 1982] Buchberger, B. (1982). Algebraic simplification. In Buchberger, B., Collins, G., and Loos, R., editors, *Computer algebra – symbolic and algebraic computation*, pages 11–43. Springer-Verlag Wien.

[Euklid, 1991] Euklid (1991). *Die Elemente*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt. Buch I–XIII. [Book I–XIII], Based on Heiberg's text, Translated from the Greek and edited by Clemens Thaer.

[GAP, 1999] GAP (1999). *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.1*. The GAP Group, Aachen, St. Andrews. (`http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~gap`).

[Knuth and Bendix, 1970] Knuth, D. E. and Bendix, P. B. (1970). Simple word problems in universal algebras. In *Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)*, pages 263–297. Pergamon, Oxford.

[Lidl and Pilz, 1998] Lidl, R. and Pilz, G. F. (1998). *Applied abstract algebra*. Springer-Verlag, New York, second edition.

[Remmert and Ullrich, 1987] Remmert, R. and Ullrich, P. (1987). *Elementare Zahlentheorie*. Birkhäuser Verlag, Basel.

[Rivest et al., 1978] Rivest, R. L., Shamir, A., and Adleman, L. (1978). A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems. *Comm. ACM*, 21(2):120–126.

[Robinson, 2003] Robinson, D. J. S. (2003). *An Introduction to Abstract Algebra*. Walter de Gruyter, Berlin – New York, www.deGruyter.com.

[Rotman, 1998] Rotman, J. J. (1998). *Galois theory*. Springer-Verlag, New York, second edition.