Diskrete Mathe VO

9.10.

→ link in KUSSS

Prof → Institut für Algebra SP2, 3. Stock

VO: einmalige schriftl. Klausur

1.T.: 6.2 $12^{00} - 14^{30}$

2.T.: Mitte - Ende März

ohne elektron. Hilfsmittel

Skriptum ausdrucken (1. Kap.)

Fragestunde Do $17^{15} - 18^{00}$ Beginn am 17.10.

1. Aussagenlogik

Math. Sprache normieren

1.1. Aussagen

Eine Aussage ist eine „Behauptung", von der man sinnvollerweise fragen kann, ob sie wahr o. falsch ist

Bsp.:

(1) $5 > 2$ eine Aussage; sie ist wahr

(2) $5 < 2$ eine Aussage; sie ist falsch

(3) $5+2$ Es hat keinen Sinn zu fragen, ob $5+2$ wahr o. falsch ist. keine Aussage, sondern ein Ausdruck oder Term.

(4) Es gibt eine gerade Zahl, deren Quadrat ungerade ist   Aussage; falsch (Wahrheitswert)

(5) Es gibt eine ungerade Zahl, deren Quadrat ungerade ist.   Aussage; wahr

Es gibt ein ≙ es gibt mind. ein

Quantor
(6) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass n gerade und n^2 ungerade ist.
so wie (4), nur verwendet man hier Variablen
→ falsche Aussage

in dieser Vorlesung: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

(7) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: wenn n gerade ist, so ist n^2 gerade.   wahre Aussage

(8) n ist gerade o. durch 3 teilbar ← keine Aussage sondern eine Aussage über n
keine Aussage, weil eine Variable, n, vorkommt
Wir bezeichnen eine solche Behauptung, die noch von Variablen abhängt, als Aussageform.
Obige Aussageform stimmt für manche n (n=8 o. n=9), und für andere nicht (n = 72997)

wenn ich schreiben würde „Es gibt ein n", ist es eine Aussage muss festgelegt werden! weil man sich fragen muss „was heißt teilbar?"

Def: Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. a ist durch b teilbar genau dann, wenn es ein $z \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass $a = z \cdot b$ (b teilt a; $b \mid a$)

$b \mid a :\Leftrightarrow$ es gibt $z \in \mathbb{Z}$ sodass $b \cdot z = a$

Junktor Atomare Aussagen

(9) n ist gerade oder n+1 ist gerade
keine Aussage, weil n vorkommt

(10) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist n gerade oder n+1 gerade
w. A.

(11) Jede gerade natürl. Zahl n mit $n \geq 4$ ist Summe zweier (nicht notwendigerweise verschiedener) Primzahlen

$4 = 2+2 \qquad 6 = 3+3 \qquad 8 = 3+5$

$10 = 7+3$ o. $5+5 \qquad 12 = 5+7 \qquad 14 = 3+11$ o. $7+7$

$16 = 11+5 = 13+3 \qquad 18 = 13+5$

Aussage: ja
Wahrheitswert: unbekannt

Goldbachsche Vermutung: ja.

(12) Jede gerade natürliche positive ~~Zahl~~ Zahl ist Summe von höchstens 6 Primzahlen
Aussage: ja
Wahrheitswert: ja
(weiß man seit 1995)

1.2. Junktoren

Atomare Aussagen sind Aussagen folgender Form.

$5 > 2$, $3 = 4$, $2 + 5 > 6$ (nicht weiter zerlegbar)

Diese Aussagen können mit logischen Junktoren zu neuen Aussagen verbunden werden:

- $5 > 2$ und $3 = 4$ falsche Aussage
- $5 > 2$ und $3 < 4$ w. A.
- $5 < 2$ und $3 < 4$ f. A.
- $5 < 2$ und $3 = 4$ f. A.

Def: Wenn A und B Aussagen sind, so definieren wir die Aussage „A und B" dann als wahr, wenn A und B beide wahr sind, und als falsch sonst.

Für „A und B" schreiben wir $A \wedge B$ und bezeichnen $A \wedge B$ die Konjunktion von A und B.

Def: Der Wahrheitswert einer Aussage A, $W(A)$, ist 1 oder w, wenn A wahr ist, und 0 oder f, wenn A falsch ist.

Sei $\sqcap$ die Fkt von $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, die durch $0 \sqcap 0 = 0 \sqcap 1 = 1 \sqcap 0 = 0$ und $1 \sqcap 1 = 1$ def. ist. Dann ist der Wahrheitswert von $A \wedge B$ durch

$$W(A \wedge B) = W(A) \sqcap W(B)$$

$\sqcap$	0	1
0	0	0
1	0	1

Diskrete Mathe VO

Logisches „oder"

mind. eines muss gelten!

$\underbrace{5 > 2}_{\text{wahr}}$ oder $\underbrace{3 < 4}_{\text{wahr}}$

Def: Seien A, B Aussagen, und sei C die Aussage „A oder B".
Dann ist C genau dann wahr, wenn mind. eine der Aussagen A und B wahr ist.

A oder B $=: A \vee B$

$C = A \vee B$ ist die Disjunktion von A und B.

Def: Sei $\sqcup : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, die durch
$0 \sqcup 0 = 0$ und $0 \sqcup 1 = 1 \sqcup 0 = 1 \sqcup 1 = 1$
def. ist. Dann ist der Wahrheitswert von
$A \vee B$ durch
$W(A \vee B) = W(A) \sqcup W(B)$ gegeben

oder-Fkt →

$\sqcup$	0	1
0	0	1
1	1	1

Verneinung:

- 5 ist nicht größer als 7. w. A.
- Nicht alle Primzahlen sind ungerade — also: w. A.

  Alle Primzahlen sind ungerade — f. A. da 2 Primzahl & gerade ist

Def: Sei A Aussage, und sei C die Aussage „nicht A". Dann ist C dann wahr, wenn A falsch ist, und dann falsch, wenn A wahr ist.

Def: Sei $\overset{\text{nicht}}{\sim}: \{0,1\} \to \{0,1\}$, $\sim(0)=1$, $\sim(1)=0$
Dann ist der Wahrheitswert von „nicht A" def. durch $W(\neg A) := \sim(W(A))$

x	$\sim(x)$
0	1
1	0

nicht alle nat. Zahlen sind $\underbrace{\text{nicht ungerade}}$
≡ nicht alle nat. Zahlen sind gerade
≡ es gibt ungerade nat. Zahlen

Rechengesetze für Junktoren

Def: Seien A, B Aussagen, A und B sind äquivalent, wenn beide wahr oder beide falsch sind
Wir schreiben: $A \equiv B$

äquiv = Wahrheitswert ist gleich aber nicht unbedingt die Aussagen an sich
z.B. $0<2 \equiv 3>5$
↳ äqu., aber nicht gleich!

Satz: Seien A, B Aussagen, dann gilt
(1) $\neg(\neg A) \equiv A$
Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall, dass A wahr ist. Dann ist $\neg A$ falsch & folglich $\neg(\neg A)$ wahr

Nun betrachten wir den Fall, dass A falsch ist. Dann ist $\neg A$ wahr und somit $\neg(\neg A)$ falsch. In jedem Fall haben A und $\neg(\neg A)$ also den gl. Wahrheitswert.

(2) $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$

Bew: Wir nehmen zuerst an, dass $\neg(A \wedge B)$ wahr ist. Dann ist $A \wedge B$ falsch. D.h., dass A & B nicht beide wahr sind; zumindest eine der beiden ist also falsch.

Wenn A falsch ist, so ist $\neg A$ wahr, und damit erst recht $(\neg A) \vee (\neg B)$.

Wenn B falsch ist, so ist $\neg B$ wahr, und damit auch $(\neg A) \vee (\neg B)$.

Nehmen wir nun an, dass $\neg(A \wedge B)$ falsch ist. Dann ist $A \wedge B$ wahr, also ist A wahr & B wahr. Somit ist $\neg A$ falsch und $\neg B$ falsch. Also ist auch $(\neg A) \vee (\neg B)$ falsch.

(3) $(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B)$

Wir beweisen wieder

$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$$

Sei a der Wahrheitswert von A, und b der Wahrheitswert von B.

Dann gilt:

Unterscheidung bzw.

$\wedge$ verbindet Aussagen → macht eine neue Auss.
$\sqcap$ verbindet ~~Zahlen~~ Fkt oder Wahrheit (0 & 1) → macht eine neue Zahl daraus

$$W(\neg(A \wedge B)) \equiv \sim (W(A \wedge B))$$
$$\equiv \sim (W(A) \sqcap W(B))$$
$$\equiv \sim (a \sqcap b)$$

„Funktion auf 0,1 wende ich an, wenn ich 0 & 1 verknüpfe
$\sqcap$ definiert für 0,1

$\sim$ = Fkt, die das „nicht" beschreibt wieder für 0,1

$$W((\neg A) \vee (\neg B)) = W(\neg A) \sqcup W(\neg B)$$
$$= (\sim (W(A))) \sqcup (\sim W(B)))$$
$$= (\sim a) \sqcup (\sim b)$$

2 Striche weil nicht 2 Aussagen

$A \equiv B$: A und B haben den gl. Wahrheitswert

Nun bleibt zu zeigen, dass für alle 4 Belegungen von a & b gilt, dass $\sim(a \sqcap b) = (\sim a) \sqcup (\sim b)$
$= (\sim(a)) \sqcup (\sim(b))$

(Beweis mittels Wahrheitstafel)

a	b	$a \sqcap b$	$\sim(a \sqcap b)$	$\sim a$	$\sim b$	$(\sim a) \sqcup (\sim b)$
0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	0

Satz (ReRe für Aussagen)

Seien A, B, C Aussagen. Dann gilt:

(1) $A \wedge B \equiv B \wedge A$

Bew: Wenn $A \wedge B$ wahr ist, so ist A wahr und B wahr. Also ist $B \wedge A$ auch wahr.
Wenn $A \wedge B$ falsch ist, so ist mind. eines von A und B falsch.
Wenn A falsch ist, so ist B und A falsch.
Wenn B falsch ist, ist $B \wedge A$ falsch.

W(A)	W(B)	W(A ∧ B)	W(B ∧ A)
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

(2) $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

$a = W(a)$, $b = W(B)$, $c = W(C)$

a	b	c	$a \sqcap b$	$(a \sqcap b) \sqcup c$	$a \sqcup c$	$b \sqcup c$	$(a \sqcup c) \sqcap (b \sqcup c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Diskrete Mathe VO

17.10.

Satz 1.12. Sei A eine Aussage. Dann gilt

(1) $A \wedge T \equiv A$ $(T := 0 = 0)$
d.h. T ist immer wahr

Bew (1): Wir nehmen an, dass $A \wedge T$ wahr ist.
Dann sind A und T beide wahr, also ist A wahr.
Wir nehmen nun an, dass $A \wedge T$ falsch ist.
Dann ist A falsch oder T falsch.
<u>1. Fall</u>: T ist falsch: Da T wahr ist, kann dieser Fall nicht eintreten.
<u>2. Fall</u>: A ist falsch: Das war zu zeigen.

(2) $A \vee T \equiv T$

Wir nehmen an, dass $A \vee T$ wahr ist. z.z. ist T ist wahr. Da T wahr ist, gilt das.
Wir nehmen an, dass T wahr ist. z.z. ist, dass $A \vee T$ wahr ist. Da T wahr ist, ist $A \vee T$ wahr.

4. Die Implikation
(wenn ... dann ..., $\Rightarrow$)

Bsp siehe Skript S. 9

Die einzige Mögl., dass eine Aussage „wenn A dann B" falsch ist, ist die, dass die Prämisse A wahr und die Konklusion B falsch ist.

Einschub: $C \equiv D$

Diskussionsvariante: Wir zeigen:

- Wenn C wahr ist, ist D wahr. — d.h. sie sind gleichbedeutend
- Wenn D falsch ist, ist C falsch.

C	D
w	w
~~w~~	~~f~~
f	w
f	f

killt diese Zeile

→ reicht nicht, da $W(C) = f$ und $W(D) = w$ nicht ausgeschlossen wird.

Daher: Wenn C w, so D w.
Wenn D w, so C w. / oder Wenn C f, dann D f.

Def: Seien A, B Aussagen, und sei C die Aussage „wenn A dann B"
Dann ist C genau dann falsch, wenn A wahr & B falsch ist. Sonst ist C wahr.
$C := A \Rightarrow B$ ($\hat{=}$ A impliziert B)

weil es 2 Argumente gibt, nämlich a & b

Sei $\rightarrow$ die Fkt von $\{0,1\}^2$ nach $\{0,1\}$, die durch

a	b	$a \rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

erklärt wird. Dann ist der Wahrheitswert von $A \Rightarrow B$ geg.

durch $W(A \Rightarrow B) = W(A) \rightarrow W(B)$

(1) $(5 > 2) \Rightarrow (10 > 4)$ w. A.
(2) $(5 > 2) \Rightarrow$ (6 ist eine gerade Zahl) w. A.
(3) $(5 < 4) \Rightarrow (5 < 11)$ w. A.
(4) $(3 < 2) \Rightarrow (103 < 102)$ w. A.
(5) $(5 > 3) \Rightarrow (-5 > -3)$ f. A.
(6) Wenn Paris in Ungarn liegt, ist Schnee schwarz. w.A.

eig. keine Aussage weil variable n nicht gebunden ist | ist eine AussageFORM

Wenn n gerade ist, so ist n^2 durch 4 teilbar.
Besser: <u>Für alle $n \in \mathbb{N}$</u> gilt, wenn n gerade ist, so ist n^2 durch 4 teilbar.

Satz: Seien A, B Aussagen. Dann gilt:

(1) $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A) \vee B.$

(2) $(A \Rightarrow B) \equiv \neg(A \wedge (\neg B))$

(3) $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg B) \Rightarrow (\neg A)$

$$(\neg B) \Rightarrow (\neg A) \overset{(1)}{\equiv} (\neg(\neg B)) \vee (\neg A)$$

$$\equiv B \vee (\neg A) \equiv (\neg A) \vee B \equiv A \Rightarrow B$$

Möglichkeiten, auszudrücken, dass $A \Rightarrow B$ wahr ist.

(1) A impliziert B.

(2) Wenn A dann B.

! (3) A gilt nur dann, wenn B gilt. es darf nicht passieren, dass A gilt $\wedge$ B nicht. Kombi $0 \wedge 1$ wird also ausgeschlossen.

(4) B gilt wenn A gilt.

(5) Wenn B nicht gilt, so gilt auch A nicht.

Weitere Junktoren

(1) $A \Leftarrow B \equiv B \Rightarrow A$

(2) $A \Leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ wahr ist.

$A \Leftrightarrow B$ ist die Äquivalenz von A und B

<u>Satz</u> Seien A, B Aussagen, Dann ist $A \Leftrightarrow B$ genau dann wahr, wenn A, B beide wahr o. beide falsch sind.

Also: $A \Leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn $A \equiv B$.

BA9911

Def : $A \dot{\vee} B \equiv A \wedge (\neg B)) \vee ((\neg A) \wedge B)$

Ausschließendes Oder , Antivalenz

Dazu gehört die Boole'sche Fkt $\oplus \; \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, die durch $0 \oplus 0 = 0$, $1 \oplus 0 = 1$, $0 \oplus 1 = 1$, $1 \oplus 1 = 0$ definiert ist.

z.B. + & - ist - , + & + ist + & - plus - ist minus (kennen wir also schon)

Def: $x | y := \sim(x \sqcap y)$.

$$\sim x = x|x$$
$$x \sqcap y = (x|y)|(x|y)$$
$$x \sqcup y = (x|x)|(y|y)$$
$$x \oplus y = (x|(x|y))|(y|(x|y))$$

gilt für alle $x, y \in \{0,1\}$

Diskrete Mathe VO

16.10

Satz 1.10 (1) $(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$

1.R, 2.R.

Beweis: Angenommen: $\underbrace{(A \wedge B)}_{\text{wahr I)}} \vee C$ (II) $\Rightarrow \vdots$

$\Rightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ } 1. Richtung

Angenommen: $(A \vee B) \wedge (B \vee C) \Rightarrow \vdots$

$\Rightarrow (A \wedge B) \vee C$ } 2. Richtung

1.R I) $(A \wedge B) \rightarrow$ A und B sind beide wahr

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$A \vee C$ wahr, $B \vee C$ wahr

d.h. $(A \vee C) \wedge (B \vee C)$

II) C wahr $\rightarrow \underbrace{A \vee C \;\wedge\; B \vee C}_{\text{wahr, da C ohnehin wahr ist}}$

2.R. $A \vee C$ (I) wann stimmt's?) und (wo treffen beide zu?) $B \vee C$ (II)) sind wahr

8 Mögl. weil 2^3

A	B	C	
w	w	w	I) II) ✓
w	f	w	I) II) ✓
w	w	f	I) II) ✓
w	f	f	I)
f	w	w	I) II) ✓
f	f	w	I) II) ✓
f	w	f	II)
f	f	f	

$\hat{=}$

a	b	c
1	1	1
1	0	1
1	1	0
1	0	0
0	1	1
0	0	1
0	1	0
0	0	0

$\Rightarrow (A \wedge B) \vee C$ ✓

$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$ ✓

$$(A \vee B) \wedge C \;\equiv\; \neg(\neg((A \vee B) \wedge C)) \;*$$

S. 1.8. (1)

$\equiv$ S. 1.8 (2)

$$(\neg(A \vee B)) \vee (\neg C)$$

$\equiv$ S. 1.8 (3)

$$(\neg A) \wedge (\neg B)$$

Versuch 1

Das neg. Zeichen auf beide anwenden

$$* \equiv \neg(((\neg A) \wedge (\neg B)) \vee (\neg C))$$

= um zu überprüfen, ob alle Klammern geschlossen wurden

S. 1.8 (3)

$$\equiv \neg((\neg A) \wedge (\neg B)) \wedge \neg(\neg C)$$

$\equiv$ – S. 1.8 (2)

$$(\underbrace{\neg(\neg A)}_{\text{S. 1.8 (1)}} \vee \underbrace{\neg(\neg B))}_{\text{S. 1.8 (1)}} \wedge \underbrace{\neg(\neg C)}_{\text{S. 1.8 (1)}}$$

$$(A \vee B) \quad \wedge \quad C$$

← führt nicht zum Ergebnis ☹

Versuch 2

$\vdots$

$\equiv$

$$\overbrace{(\neg A) \wedge (\neg B)}$$

$$((\neg A) \vee (\neg C)) \wedge ((\neg B) \vee (\neg C)))$$

$$\equiv \neg((\neg A) \vee (\neg C)) \vee \neg((\neg B) \vee (\neg C))$$

S. 1.8 (2) S. 1.8 (3)

$$\equiv \underline{\underline{(A \wedge C) \vee (B \wedge C)}}$$

☺

Diskrete Mathe VO

23.10.

Prädikatenlogik

2.1. Aussageformen

(1) x ist gerade $= A(x)$

A(3) ist falsch
A(4) ist wahr.

$A(x)$ ... keine Aussage, sondern Aussageform.

(2) $3x - 2y = 8$

(3) $x \geq 2 + y$

(4) x und y haben denselben Rest bei Div. durch 5

$\left.\begin{array}{l} x + 5 = -2 \\ x = -7 \end{array}\right\}$ Äquivalenzumformung

↳ äquivalent

hinreichend

$\left.\begin{array}{l} x = 3 \\ x^2 = 9 \end{array}\right\}$ keine Äqu.umformung

nicht hinreichend sondern notwendig

(weil $(-3)^2 = 9$)

nicht äqu. (über $\mathbb{R}$)
äquivalent (über $\mathbb{N}$)

2.2 Quantoren

Auf $\mathbb{N}$ def wir

$$A(x,y) \Leftrightarrow x = 2y - 1$$

gilt für $(5,3)$, $(19,10)$ aber nicht für $(3,5)$

$B(x) \Leftrightarrow$ es gibt $y \in \mathbb{N}$, sodass $x = 2y - 1$.

$B(x)$ ist äquivalent zu „x ist ungerade"

Über $\mathbb{R}$: $C(x,y) :\Leftrightarrow x^2 = y$

$D(y) :\Leftrightarrow$ es gibt $x \in \mathbb{R}$ sodass $x^2 = y$

$D(y)$ ist äquivalent zu $y \geq 0$

$\exists x \in \mathbb{R} : x^2 = y \iff D(y)$

gebundene variable

freie var.

S. 18

A := Es gibt eine gerade Zahl, die durch 3 und du... 5 teilbar ist.

$G = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\} = \{x \in \mathbb{N}_0 \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : x = 2k\}$

$A \equiv \exists g \in G : (3 | g \wedge 5 | g)$

$\forall x \in \mathbb{N}_0 : \exists y \in \mathbb{N}_0 : x = y + y$ falsch

(für alle $\mathbb{N}_u$)

$\forall x \in \mathbb{N}_0 \; \exists y \in \mathbb{N} : x = y + y + y \vee x = y + y + y + 1$

falsch $(x = 2)$

$\forall x \in \mathbb{N}_0 ((\exists y \in \mathbb{N}_0 : x = y + y) \vee (\exists y \in \mathbb{N}_0 : x + y + y + 1))$

↳ Jede nat. Zahl ist entw. gerade oder ungerade. wahr

*[1] Skript $A(a, x, y) :\iff a \cdot y = x$ (über $\mathbb{R}$)

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es $y \in \mathbb{R}$, sodass $a \cdot y = x$

$\equiv \forall x \in \mathbb{R} \; \exists y \in \mathbb{R} : ay = x$

$B(a) \iff \forall x \in \mathbb{R} \; \exists y \in \mathbb{R} : ay = x$

$B(2)$ ist wahr

$B(0{,}7) \equiv \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}:$ $0{,}7 \cdot y = x$ $B(0{,}7)$ ist wahr

$B(0)$ $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: 0 \cdot y = x$

Vermutung:

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: a \cdot y = x$ ist äquivalent zu $a \neq 0$.

$\boxed{\text{Beweis}}$ Sei a so, dass $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: ay = x$ wahr ist.

z.z. $a \neq 0$

Da $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: ay = x$ wahr ist, gilt insbesondere $\exists y \in \mathbb{R}: a \cdot y = 2$. Nehmen wir an, dass $a = 0$. Dann ist für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Zahl $a \cdot y = 0$, also nicht 2, im Widerspruch zu $\exists y \in \mathbb{R}: a \cdot y = 2$. Folglich gilt $a \neq 0$.

Sei nun a so, dass $a \neq 0$ ist

z.z. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}: ay = x$

Sei $x \in \mathbb{R}$

Wir setzen nun $y := \frac{x}{a}$. Dann gilt $a \cdot y = a \cdot \frac{x}{a} = x$

Also belegt $y := \frac{x}{a}$, dass $\exists y \in \mathbb{R}: ay = x$ wahr ist.

Neue Aussageform:

$\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : ay = x \quad :\Leftrightarrow \quad C(a)$

Es gibt ein $y \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$a \cdot y = x$

$a = 0 \qquad \exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 0 \cdot y = x \quad \equiv$

$\qquad\qquad \exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : 0 = x$

$C(0)$ ist falsch

$a = 1 \qquad \exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : y = x$

$C(1)$ ist falsch

Vermutung:

Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $C(a)$ falsch.

$\forall y \in \mathbb{R} \; \exists x \in \mathbb{R} : a \cdot y = x$ gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$\exists x \in \mathbb{R} \; \exists y \in \mathbb{R} : a \cdot y = x$ gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

Diskrete Mathe VO

24.10.

ab S. 20

ReRe Quantoren

- Umbenennung der geb. Variablen:

$\exists x \in \mathbb{R} : x + 7 \geq 3 \equiv$

$\exists a \in \mathbb{R} : a + 7 \geq 3$

$\exists x \in \mathbb{Z} : y = x + x \equiv \exists a \in \mathbb{Z} : y = a + a$

nicht das selbe!

nicht mehr äquivalent

$\exists y \in \mathbb{Z} : y = y + y$ (verbotene Umbenennung)

- Vertauschung gleicher Quantoren

Siehe Satz 2.6, S. 20

Beweis von 2.6 (1)

Wir nehmen an, dass $(\exists x \in X)(\exists y \in Y)\, A(x,y)$ gilt. z.z.: $(\exists y \in Y)((\exists x \in X)\, A(x,y))$ ← diese () dürfen gemacht werden

Da $(\exists x \in X)(\exists y \in Y)\, A(x,y)$ gilt, gibt es ein $a \in X$, sodass $\exists y \in Y : A(a,y)$ gilt. Es gibt dann $b \in Y$, sodass $A(a,b)$ gilt.

Nun gilt daher auch $(\exists x \in X) : A(x,b)$, was durch $x := a$ belegt wird.
Daher gilt auch $(\exists y \in Y) : ((\exists x \in X) : A(x,y))$, was von $y = b$ bezeugt wird. ... [Umkehrung und (2): Ü]

↑ Diskrete Übung

! man darf die gleichen Quantoren vertauschen, verschiedene aber nicht!

zu ·) vertausch. gl. Qu.

Satz 2.7)

Beweis von (2):

Wir nehmen zunächst an, dass $\neg((\forall x \in X) A(x))$ wahr ist und zeigen, dass $(\exists x \in X)(\neg A(x))$ wahr ist.

Da $\neg((\forall x \in X) A(x))$ wahr ist, ist $(\forall x \in X) A(x)$ falsch. Also gibt es ein $a \in X$, sodass $A(a)$ falsch ist. Also gilt $\exists x \in X : \neg A(x)$, da ja $\neg A(a)$ wahr ist.

⋮

Bsp von gestern:

Wir wollten gestern zeigen, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} : ay = x$ falsch ist.

z.z. $\forall a \in \mathbb{R} : \neg(\exists y \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} : ay = x)$

Die zu zeigende Aussage ist äquivalent zu

$\forall a \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} : ay \neq x$

Sei $a \in \mathbb{R}$. Sei $y \in \mathbb{R}$. Wir wählen $x := ay + 1$

Da $ay \neq ay + 1$ ist, belegt dieses x, dass $\exists x \in \mathbb{R} : ay \neq x$ gilt.

„Es existiert ein" so beweisen indem man ein Bsp findet

- Vorziehen des Quantors

Satz 2.8) (1) (2)

(1) Sei $x \in X$ so, dass $A(x)$ und $\exists y \in Y : B(x,y)$ gelten. Z.z. $\exists y \in Y : (A(x) \wedge B(x,y))$
Wir wissen, dass es $b \in Y$ mit $B(x,b)$ gibt.
Also gilt $A(x) \wedge B(x,b)$ und somit
$\exists y \in Y : (A(x) \wedge B(x,y))$

......

Gilt auch folgende Regel?

$$A(x) \vee (\exists y \in Y : B(x,y)) \equiv (\exists y \in Y)(A(x) \vee B(x,y))$$

Wir beweisen "$\overset{\text{links hinreichend rechts}}{\Rightarrow}$":

Wir nehmen an, dass $x \in X$ so ist, dass $A(x) \vee (\exists y \in Y : B(x,y))$ gilt.

Z.z.: $(\exists y \in Y)(A(x) \vee B(x,y))$

1. Fall| $\exists y \in Y : B(x,y)$: Fallannahme Dann gibt es $b \in Y$ mit $B(x,b)$. Also gilt auch $A(x) \vee B(x,b)$. Somit belegt $y := b$, dass $(\exists y \in Y)(A(x) \vee B(x,y))$ gilt.

2. Fall| Es gilt $A(x)$ (d.h. $A(x)$ ist wahr): Sei b ein Element aus Y. Dann gilt $A(x) \vee B(x,b)$. Somit belegt $y := b$, dass $\exists y \in Y : (A(x) \vee B(x,y))$ gilt.

Wir haben verwendet, dass $Y \neq \emptyset$
$Y \neq \{\}$

Erklärung: $A(x) :\Leftrightarrow x \geq 2$, $Y = \emptyset$
wählen $x = 3$ $A(3) \vee \exists y \in \emptyset : B(x,y)$ wahr
$\exists y \in \emptyset : (A(3) \vee B(x,y))$ falsch.

Tautologie

$(\forall x \in X)\,(A(x) \vee (\neg A(x)))$

Satz 2.11 gibt eine nicht offensichtliche Tautologie an (siehe (1) (2))

(1) ist für jede Aussageform wahr, sofern $X = \emptyset$.

Beweis 1. Fall: $\forall y \in X$. $A(y)$ gilt. Sei x ein Element aus X.

2. Fall: Es gibt ein $a \in X$ mit $\neg A(a)$

Diskrete Mathe VO

30.10.

Prädikatenlogik

$A(x_1, \dots, x_n)$ ... atomare Aussageformen

- Junktoren : $\wedge, \vee, \overset{(\sim)}{\neg}, \Rightarrow, \overset{\text{Scheffer-Strich}}{|}, \Leftrightarrow, \dot{\vee}$
- Quantoren : $\exists, \forall$ $\qquad \exists!$ (es gibt genau ein)

$\exists!$: Es gibt genau ein $x \in \mathbb{R}$, sodass $x > 0$ und $x^2 = 4$

$\exists!\, x \in \mathbb{R} : (x > 0 \wedge x^2 = 4)$

$$\exists!\, x \in X : A(x) \quad \equiv$$
$$\underbrace{(\exists x \in X : A(x))}_{\text{Existenz}} \wedge \underbrace{(\forall y, z \in X : ((A(y) \wedge A(z)) \Rightarrow y = z))}_{\text{Eindeutigkeit}}$$

$$C \equiv \exists!\, x \in \mathbb{R}\ \underbrace{\exists!\, y \in \mathbb{R} : x^2 = y}_{\text{ist für alle } x \in \mathbb{R} \text{ wahr}}$$

C ist falsch.

$$\exists!\, y \in \mathbb{R}\ \underbrace{\exists!\, x \in \mathbb{R} : x^2 = y}_{E(y)} \equiv D$$

$E(y)$ gilt genau dann, wenn $y = 0$.

$D \equiv \exists!\, y \in \mathbb{R} : y = 0$

D ist wahr

Paar

$\exists! (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y$

falsch (weil Paar 1,1 ; 2,4 ; 3,9 ; ...) d.h. es gibt mehrere Paare

3. Mengen

Menge ... Zusammenfassung von Objekten zu einem Ganzen

Weitere Erklärung siehe Skript S. 25

* ab dieser Stelle kommt x nicht mehr vor, daher kann ich es verwenden

es würde z.B. genauso gehen $(\forall y \in B : y \in A)$

Für alle Mengen A, B gilt:

von hier, bis hier

$$A = B \iff ((\forall x \in A : x \in B)^{*} \wedge (\forall x \in B : x \in A))$$

Quantor $\forall x$ erstreckt sich immer nur bis zur Klammer

daher ist x nicht doppelt quantifiziert

Axiom (Axiom der Umfangsbestimmtheit ; Extensionalitätsaxiom)

$$g = \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0 \}$$

$$h = \{ \binom{0}{0} + t\binom{1}{2} \mid t \in \mathbb{R} \}$$

diesen beiden Menge enthalten die gl. Elemente, daher gleich

$$= \{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R} : \binom{x}{y} = \binom{0}{0} + t\binom{1}{2} \}$$

Es gilt $g = h$.

Wie kann man Mengen angeben?

- Aufzählen der Elemente

  $A = \{3, 7, 11\}$

- Auswahl durch charakteristische Eigenschaft

  $B = \{ x \in \mathbb{Z} \mid \exists y \in \mathbb{Z} : y^2 = x \}$

  ich gehe davon aus, dass $\mathbb{Z}$ schon mal def wurde

  beschr. Verfahren

  $= \{0, 1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ eig nicht ganz eindeutig, daher das obere

  Quadratzahlen

- „Produktion" aller Elemente

  $C = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{Z}, x \leq -5\}$

  C ist die Menge aller x^2+1, wobei $x \in \mathbb{Z}$ und $x \leq -5$ ist.

  $\{26, 37, 50, 65, 82, \ldots\}$

  $C = \{y \mid \exists x \in \mathbb{Z} : (y = x^2 + 1 \text{ und } x \leq -5)\}$

  $= \{y = \mathbb{Z} \mid (\exists x \in \mathbb{Z} : (y = x^2 + 1 \text{ und } x \leq -5))\}$

Formen:

für die gilt:

$B = \{x \in A \mid P(x)\}$ (Auswahl)

wobei

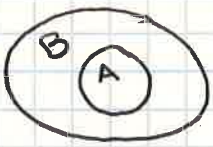
$C = \{t(x) \mid x \in M \text{ und } Q(x)\}$

kann man nicht mischen!

$= \{y \mid \exists x \in M : y = t(x) \text{ und } Q(x)\}$. ← so schreibt man Variante C auf Variante B um

für die gilt

Def: $A \subseteq B :\Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$.



Extensionalitätsaxiom

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ und } B \subseteq A).$$

Schreibweise $A \subseteq B \Leftrightarrow B \supseteq A$

Teilmenge

B ist eine Obermenge von A

$A \subseteq B$	B enthält A	... als Teilmenge	$*^1$
$a \in B$	$\underbrace{\text{B enthält a}}_{\text{alleine schlecht formuliert!}}$	... als Element	$*^2$

besser: $*^1$ A ist eine Teilmenge von B

$*^2$ a ist ein Element von B

S. 26 : Insbesondere gilt ...

Diskrete Mathe VO

31.10.

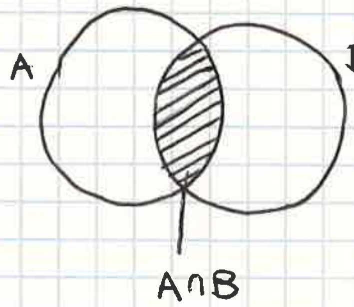
Mengen (Wh 30. 10.)

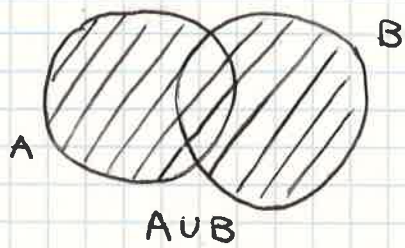
$a \in M$

$$A = B \iff \underbrace{(\forall x \in A : x \in B)}_{A \subseteq B} \wedge \underbrace{(\forall x \in B : x \in A)}_{B \subseteq A}$$

3.2. Operationen auf Mengen

Def. 3.3.





Rechenregeln

Satz 3.4.

(Beweis Satz 5 (siehe S. 27))

Um $X = Y$ zu beweisen, zeigen wir $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$.

$X \subseteq Y$ heißt: $\forall x \in X : x \in Y$

Beweis I von (5)

Wir zeigen als erstes $(A \cap B) \cup C \subseteq (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Sei dazu $x \in (A \cap B) \cup C$. z.z. ist, dass

$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C$.

Dazu zeigen wir als erstes, dass $x \in A \cup C$.

... Fortsetzung siehe Skript S. 28

⋮

S

* Wir zeigen nun: $(A \cup C) \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup C$

siehe Skript

Sei dazu $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ z.z. $x \in (A \cap B) \cup C$

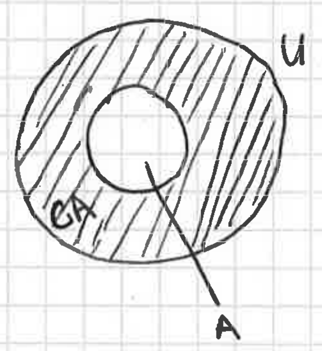
Da $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, gilt $x \in A \cup C$ und $x \in B \cup C$

1. Fall: $x \in C$: Dann gilt $x \in (A \cap B) \cup C$.
2. Fall: $x \notin C$: skript!

Def. 3.6

$U \qquad U \setminus A =: \underset{\uparrow}{C_U} A = \complement A.$

Komplement von A



$\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R} \setminus \{2,3\} \qquad \frac{1}{(x-2)(x-3)}$

ReRe S. 29 Satz 3.7