Diskrete Mathematik (Wintersemester 2019)
ASB1MA1DMU, SeBMA01203
9. Übungsblatt für den 16.12.2019, 19.12.2019 und 20.12.2019

65. Sei $q \in \mathbb{R},\ q > 1$. Zeigen Sie durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

66. Sei $a, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie, falls $a^n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist $a = 2$ und n eine Primzahl. (Hinweis: Verwenden Sie die Formel aus dem letzten Beispiel.)

67. Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei $F_m := 2^{2^m} + 1$ die m-te Fermat Zahl. Zeigen Sie, dass F_6 keine Primzahl ist. (Hinweis: Prüfen Sie, dass 274177 ein Teiler von F_6 ist. Sie dürfen dazu auch technische Hilfsmittel (Taschenrechner oder Computer) verwenden.)

68. Im Beispiel 66. wurden die Primzahlen der Form $2^n - 1$ betrachtet. Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen $n < 15$, sodass $2^n - 1$ tatsächlich eine Primzahl sei.

69. Wie viele Endnullen hat die Zahl $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$? (Hinweis: Berechnen Sie die Anzahl der Endnullen der Zahl $n!$ für

$$n = 1, 2, 3, \ldots, 8, 9, 10, \ldots,$$

und stellen Sie eine Vermutung an. Dann führen Sie einen Beweis durch.)

70. Seien $a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gekürzt, und die Nenner b und d teilerfremd sind, so ist auch der Bruch $\frac{ad+bc}{bd}$ gekürzt.

71. Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, usw. Zeigen Sie

$$p_n \leq 2^{2^{n-1}}.$$

(Hinweis: Euklids Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt beruht auf folgender Überlegung: Seien $q_1, q_2, \ldots, q_n$ Primzahlen. Dann ist der kleinste positive Teiler von $q_1 \cdot q_2 \cdots q_n + 1$ eine Primzahl, die von allen q_i verschieden ist.)

72. Welche Zahlen $q \in \mathbb{N}$ erfüllen folgende Eigenschaft?

Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $q \mid a \cdot b$ gilt $q \mid a$ oder es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $q \mid b^n$.