Diskrete Mathematik (Wintersemester 2019)
ASB1MA1DMU, SeBMA01203
8. Übungsblatt für den 9.12.2019, 12.12.2019 und 13.12.2019

57. Für natürliche Zahlen $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ gilt die Regularität der Addition

$$a + c = b + c \;\Rightarrow\; a = b.$$

Beweisen Sie diesen Satz durch Induktion über c, d.h. zeigen Sie, dass die Menge $S := \{c \in \mathbb{N}_0 \mid (\forall a \in \mathbb{N}_0)(\forall b \in \mathbb{N}_0)\; a + c = b + c \Rightarrow a = b\}$ gleich $\mathbb{N}_0$ ist.

58. Auf den natürlichen Zahlen kann man mit Hilfe der Addition folgende Relation definieren:

Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$:

$$a < b \;:\Leftrightarrow\; (\exists n \in \mathbb{N})\, a + n = b.$$

Zeigen Sie mit Hilfe dieser Definition für $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ die

(a) Monotonie der Addition

$$a < b \;\Rightarrow\; a + c < b + c.$$

(b) Monotonie der Multiplikation

$$a < b \;\Rightarrow\; a \cdot c < b \cdot c,\; \text{falls } c \neq 0.$$

Verwenden Sie die üblichen Rechenregeln für Addition und Multiplikation bzw. die Nullteilerfreiheit der natürlichen Zahlen $a \cdot b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$.

59. Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei $F_m := 2^{2^m} + 1$ die m-te Fermat-Zahl.

Zeigen Sie durch Induktion, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\prod_{i=0}^{m-1} F_i \;=\; F_m - 2$$

60. Bestimmen Sie für a und b jeweils $\mathrm{ggT}(a,b)$ und zwei ganze Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\mathrm{ggT}(a,b) = u \cdot a + v \cdot b.$$

(a) $a = 180,\ b = 153$

(b) $a = 243,\ b = 92$

61. Seien $a, b, x \in \mathbb{N}$ und $u, v \in \mathbb{Z}$ so, dass $x = u \cdot a + v \cdot b$. Zeigen Sie:

> Wenn x sowohl ein Teiler von a als auch ein Teiler von b ist, dann gilt $x = \mathrm{ggT}(a,b)$.

Hinweis: Zeigen Sie x teilt $\mathrm{ggT}(a,b)$ und $\mathrm{ggT}(a,b)$ teilt x.

62. Seien $a, b \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}$ so, dass $a \mid y,\ b \mid y$ und $\mathrm{ggT}(a,b) = 1$.

Zeigen Sie: $\qquad a \cdot b \mid y.$

Hinweis: Verwenden Sie die Sätze 4.19 und 4.20 aus dem Skriptum.

63. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, wobei nicht beide 0 sein dürfen, und sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{ggT}(k \cdot a, k \cdot b) \;=\; k \cdot \mathrm{ggT}(a,b).$$

64. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ so, dass $a \mid b$. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{ggT}(a,c) \mid \mathrm{ggT}(b,c)$.

(b) $\mathrm{kgV}(a,c) \mid \mathrm{kgV}(b,c)$.