Diskrete Mathematik (Wintersemester 2019)
ASB1MA1DMU, SeBMA01203
7. Übungsblatt für den 2.12.2019, 5.12.2019 und 6.12.2019

49. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Gehen Sie dazu so vor:

    (a) Geben Sie eine Aussageform $A(n)$ an, sodass die zu beweisende Aussage die Form $\forall n \in \mathbb{N}_0 : A(n)$ hat.

    (b) Strukturieren Sie Ihren Induktionsbeweis genauso wie den Beweis aus Beispiel 47.

    (c) An einer Stelle müssen Sie verwenden, dass

    $$1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$$

    gilt. Warum gilt das?

50. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}.$$

51. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)^2.$$

52. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq b$. Zeigen Sie

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists q \in \mathbb{Z} \,:\, a^n - b^n = q \cdot (a-b)$$

durch vollständige Induktion.

    (a) Geben Sie dazu zuerst eine Aussageform $A(n)$ an, für die Sie $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ beweisen wollen!

    (b) Benützen Sie den Hinweis

    $$a^{n+1} - b^{n+1} = a(a^n - b^n) + b^n(a-b).$$

(c) Die hier bewiesene Aussage sagt also, dass es ein $q(2)$ mit $a^2 - b^2 = q(2) \cdot (a-b)$, ein $q(3)$ mit $a^3 - b^3 = q(3) \cdot (a-b)$, ... gibt. Können Sie aus Ihrem Induktionsbeweis eine Rekursion für $q(n)$ gewinnen, also eine Aussage der Form „für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $q(n+1) = F(q(n), a, b, n)$"?

53. Wir beweisen mittels vollständiger Induktion, dass alle Frauen blond sind. Gibt es in diesem Beweis eventuell einen Fehler?

> Wir führen den Beweis, indem wir für jede Gruppe von n Frauen zeigen, dass alle Frauen in der Gruppe die gleiche Haarfarbe haben. Da es nur endlich viele Frauen gibt, müssen also alle die gleiche Haarfarbe haben. Da es mindestens eine blonde Frau gibt, müssen also alle blond sein.
>
> Die Behauptung über die einheitliche Haarfarbe einer Frauengruppe zeigen wir per Induktion über die Gruppengröße n. Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich. Die Induktionsvorraussetzung ist nun, dass in jeder Gruppe von n Frauen alle die gleiche Haarfarbe haben. Wir müssen dies für Gruppen von $n+1$ Frauen zeigen. Nehmen wir also eine solche Gruppe von $n+1$ Frauen her und bilden durch Herausnehmen der kleinsten Frau eine Gruppe von n Frauen. Diese haben nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Haarfarbe. Fügen wir nun die kleinste Frau wieder dazu und nehmen dafür die größte heraus, erhalten wir wieder eine Gruppe von n Frauen, die nach Induktionsvoraussetzung alle die gleiche Haarfarbe haben. Die kleinste Frau hat also auch die gleiche Haarfarbe wie die anderen n. Damit ist der Induktionsbeweis vollständig.

In den folgenden Beispielen beweisen wir einige grundlegende Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation. Zeigen Sie in den folgenden Beispielen jeweils, dass die angeführte Implikation für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gilt.

54. (a) $(x \mid y \text{ und } x \mid z) \Rightarrow x \mid (y+z)$.

    (b) $x \mid y \Rightarrow x \mid zy$.

55. (a) $(x \mid y \text{ und } y \mid z) \Rightarrow x \mid z$.

(b) $(x \mid y \text{ und } y \mid x) \Rightarrow (x = y \text{ oder } x = -y)$.

56. (a) $(x \mid y \text{ und } z \mid x \text{ und } z \mid y \text{ und } z \neq 0) \Rightarrow \frac{x}{z} \mid \frac{y}{z}$.

(b) $x \mid y \Rightarrow zx \mid zy$.