

Diskrete Mathematik (Wintersemester 2019)

ASB1MA1DMU, SeBMA01203

6. Übungsblatt für den 25.11.2019, 28.11.2019 und 29.11.2019

41. Finden Sie eine Aussageform $B(y)$ über den reellen Zahlen, die zur Aussageform

$$(\exists z \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot (y - 3) = z)$$

äquivalent ist, aber keine Quantoren enthält.

Zeigen Sie die Äquivalenz ähnlich zu den Ausführungen im Skriptum.

42. Beweisen Sie mit Hilfe der Peano-Axiome in der Sichtweise der Mengenlehre (Satz 4.2) folgenden Satz:

$$(\forall x \in \mathbb{N}_0) \ x^+ \neq x$$

Zeigen Sie, dass die Menge $S := \{x \in \mathbb{N}_0 \mid x^+ \neq x\}$ gleich $\mathbb{N}_0$ ist.

Führen Sie indirekte Beweise und leiten Sie Widersprüche zu den Aussagen in Satz 4.2 her.

Verwenden Sie für die nächsten beiden Beispielen folgende Definition der Addition: Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ definieren wir eine Funktion $a_m : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ rekursiv durch $a_m(0) := m$ und $a_m(x^+) := (a_m(x))^+$. Darauf aufbauend definieren wir $x + y := a_x(y)$ für $x, y \in \mathbb{N}_0$.

43. Wir benützen diese rekursive Definition, um $0^{++} + 0^{+++}$ zu berechnen. Dabei sparen wir Klammern, indem wir etwa für $((x^+)^+)^+$ einfacher x^{+++} schreiben. Vervollständigen Sie dazu die folgende Berechnung und die angeführten Begründungen!

$0^{++} + 0^{+++}$	
$= a_{0^{++}}(0^{+++})$	wegen Definition von $x + y$ mit $x = 0^{++}$ und $y = 0^{+++}$
$= (a_{0^{++}}(0^{++}))^+$	wegen Definition von a mit $m = 0^{++}$, $x = \underline{\hspace{1cm}}$
$= (a_{0^{++}}(0^+))^{++}$	wegen Definition von a mit $m = \underline{\hspace{1cm}}$, $x = \underline{\hspace{1cm}}$
$= (a_{0^{++}}(\underline{\hspace{1cm}}))^{+++}$	wegen $\underline{\hspace{2cm}}$ mit $m = \underline{\hspace{1cm}}$, $x = \underline{\hspace{1cm}}$
$= (0^{++})^{+++}$	wegen $\underline{\hspace{2cm}}$
$= 0\underline{\hspace{1cm}}$	

Welche Addition haben wir dadurch ausgerechnet?

44. Wir beweisen nun die Assoziativität der Addition, also dass für alle $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $(x + y) + z = x + (y + z)$. Wir zeigen dazu, dass die Menge

$$S := \{z \in \mathbb{N}_0 \mid \forall x \in \mathbb{N}_0 \forall y \in \mathbb{N}_0 : (x + y) + z = x + (y + z)\}$$

die Eigenschaften

(I) $0 \in S$ und

(II) $\forall z \in \mathbb{N}_0 : z \in S \Rightarrow z^+ \in S$

erfüllt.

- (a) Verwenden Sie die Definition der Addition, um $(x+y)+0$ und $x+(y+0)$ zu berechnen, und schließen Sie daraus $0 \in S$.
- (b) Zeigen Sie $\forall z \in \mathbb{N}_0 : z \in S \Rightarrow z^+ \in S$ in folgender Weise: Sei $z \in \mathbb{N}_0$. Wir nehmen an, dass $z \in S$ gilt. Das bedeutet, dass

$$\forall \text{_____} \forall \text{_____} : \text{_____}.$$

Wir wollen zeigen, dass $z^+ \in S$ gilt. Dazu ist zu zeigen, dass

$$\forall \text{_____} \forall \text{_____} : \text{_____}. \quad (1)$$

Um _____ zu beweisen, fixieren wir $x, y \in \mathbb{N}_0$.

Wegen _____ gilt dann

$$(x + y) + (z^+) = ((x + y) + z)^+.$$

Da $z \in S$, gilt $(x + y) + z = \text{_____}$ und somit $((x + y) + z)^+ = \text{_____}$. Nun verwenden wir die Definition von $+$ und erhalten

$$\text{_____} = (a_x(y + z))^+ = (a_x(a_y(z)))^+.$$

Wegen der Definition von a_x und a_y gilt

$$(a_x(a_y(z)))^+ = \text{_____} = \text{_____}.$$

Wir ersetzen $a_u(v)$ wieder durch $u + v$ und erhalten insgesamt, dass

$$(x + y) + (z^+) = \text{_____}.$$

Somit gilt _____ $\in S$.

Da die Menge S die Eigenschaften _____ und _____ erfüllt, gilt also $S =$ _____. Somit gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{N}_0$, dass

_____.

Verwenden Sie für die nächsten beiden Beispielen folgende Definition der Multiplikation: Für jedes $x \in \mathbb{N}_0$ definieren wir eine Funktion $m_x : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ rekursiv durch $m_x(0) := 0$ und $m_x(y^+) := m_x(y) + x$. Darauf aufbauend definieren wir $x \cdot y := m_x(y)$ für $x, y \in \mathbb{N}_0$.

45. Benützen Sie diese rekursive Definition, um $0^{+++} \cdot 0^{++}$ zu berechnen. Gehen Sie dabei analog zu Aufgabe 43 vor und sparen Sie wieder Klammern. Verwenden Sie die gewohnten Rechenregeln für die Addition.

46. Beweisen Sie die Rechtsdistributivität, also dass für alle $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$.

Zeigen Sie dazu analog zu Aufgabe 44, dass die Menge

$$S := \{z \in \mathbb{N}_0 \mid \forall x \in \mathbb{N}_0 \forall y \in \mathbb{N}_0 : (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)\}$$

die Eigenschaften

(I) $0 \in S$ und

(II) $\forall z \in \mathbb{N}_0 : z \in S \Rightarrow z^+ \in S$

erfüllt.

In den folgenden Beispielen gehen wir wieder davon aus, dass wir die Grundrechnungsarten und ihre Eigenschaften kennen.

47. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n!$ definiert durch $0! = 1$ und $(n + 1)! = n! \cdot (n + 1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Vervollständigen Sie den folgenden Induktionsbeweis dafür, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $n! \geq 2^{n-1}$.

Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass

$$\forall n \in \mathbb{N} : n! \geq 2^{n-1}$$

gilt. Sei $A(n)$ die Aussageform $n! \geq 2^{n-1}$.

Induktionsanfang: Wir zeigen $A(1)$: _____
_____.

Induktionsschritt: Wir zeigen

$$\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1).$$

Sei dazu $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen nun an, dass $A(n)$ gilt, also dass

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

Das ist die *Induktionsannahme*. Die *Induktionsbehauptung* ist, dass $A(n+1)$ gilt, also dass

$$(n+1)! \geq \text{_____}.$$

Um die Induktionsbehauptung zu zeigen, berechnen wir

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

Wegen _____ gilt

$$n! \cdot (n+1) \geq \text{_____}.$$

Es gilt daher insgesamt _____ $\geq 2^{n-1} \cdot (n+1) \geq \text{_____} \cdot 2 \geq$
_____. Folglich gilt die Induktionsbehauptung.

Somit ist der Induktionsbeweis gelungen; es gilt also

_____.

48. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2.$$