Diskrete Mathematik (Wintersemester 2019)
ASB1MA1DMU, SeBMA01203
4. Übungsblatt für den 11.11.2019, 14.11.2019 und 15.11.2019

25. Ob eine Aussage (z.B. $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$) eine Tautologie ist, kann man oft (indirekt) mit folgender Methode feststellen. Man nimmt an, dass es eine Belegung mit Wahrheitswerten gebe, sodass die Aussage mit dieser Belegung falsch wird, und leitet daraus einen Widerspruch ab.

    Wir nehmen also an, dass $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ falsch ist, dann muss $A \wedge (A \Rightarrow B)$ wahr und B falsch sein. Da $A \wedge (A \Rightarrow B)$ wahr ist, müssen sowohl A als auch $A \Rightarrow B$ wahr sein. Da aber A wahr und B falsch sind, muss $A \Rightarrow B$ im Widerspruch dazu falsch sein.

    Zeigen Sie mit dieser Methode, dass

    $$((A \Rightarrow C) \wedge (\neg A \Rightarrow D)) \Rightarrow (C \vee D)$$

    eine Tautologie ist.

26. Finden Sie eine Aussageform $A(x)$ über den reellen Zahlen, die zur Aussageform

    $$\exists z \in \mathbb{R} : x + z^2 = 5$$

    äquivalent ist, aber keinen Quantor enthält.

    Zeigen Sie die Äquivalenz ähnlich zu den Ausführungen im Skriptum.

27. Finden Sie eine Aussageform $B(x, y)$ über den reellen Zahlen, die zur Aussageform

    $$\exists z \in \mathbb{R} : (3x + z = 0 \wedge y - 2z = 0)$$

    äquivalent ist, aber keinen Quantor enthält.

    Zeigen Sie die Äquivalenz ähnlich zu den Ausführungen im Skriptum.

28. Sei $A(x, y)$ einen Aussageform über den reellen Zahlen. Zeigen Sie:

    $$(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\ A(x, y) \quad \Rightarrow \quad (\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})\ A(x, y)$$

    Gilt auch die Umkehrung?

29. Bestimmen Sie in den folgenden Beispielen, ob p und q für alle Aussageformen äquivalent sind.

    (a) $p = \exists x \in \mathbb{R} : A(x) \wedge B(x)$, $q = (\exists x \in \mathbb{R} : A(x)) \wedge (\exists x \in \mathbb{R} : B(x))$.

    (b) $p = \forall x \in \mathbb{R} : A(x) \wedge B(x)$, $q = (\forall x \in \mathbb{R} : A(x)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} : B(x))$.

    Beweisen Sie jene Richtungen der Äquivalenzen, die gültig sind, und geben Sie Gegenbeispiele an, falls dies nicht der Fall ist.

30. Geben Sie Formulierungen von

    - es gibt kein $x \in X$ mit $A(x)$
    - es gibt mindestens zwei $x \in X$ mit $A(x)$
    - es gibt höchstens zwei $x \in X$ mit $A(x)$
    - es gibt genau zwei $x \in X$ mit $A(x)$

    an, in denen Sie nur die Quantoren $\exists$ und $\forall$ verwenden.

31. Seien A, B, C Mengen. Zeigen Sie

    $$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

    auf die beiden im Skriptum skizzierten Arten. Einmal durch Verwendung von Gleichheiten der Aussagenlogik und einmal durch Beweisen von zwei Inklusionen.

32. Seien A, B, C Mengen mit $A \cap C = \emptyset$ und $A \cup C = B$. Zeigen Sie, dass $C = B \setminus A$.