Diskrete Mathematik (Wintersemester 2019/2020)
ASB1MA1DMU, SeBMA01203
11. Übungsblatt für den 20.1.2020, 23.1.2020 und 24.1.2020

81. Sei $f : \{1,2,3,4\} \to \{a,b,c,d\}$ gegeben durch $f = \{(1,a),(2,a),(3,b),(4,c)\}$.

    (a) Zeichnen Sie ein Pfeildiagramm für f, und geben Sie den Definitionsbereich, den Wertebereich und zwei mögliche Zielmengen von f an.

    (b) Bestimmen Sie die Bildmenge $f(\{1,3\})$ von $\{1,3\}$ unter f, und bestimmen Sie deren Urbild $f^{-1}(f(\{1,3\}))$.

    (c) Gilt für alle Mengen A, B, C mit $C \subseteq A$ und für alle Funktionen $f : A \to B$, dass $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$?

    (d) Gilt für alle Mengen A, B, C mit $C \subseteq A$ und für alle Funktionen $f : A \to B$, dass $C \subseteq f^{-1}(f(C))$?

    Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort!

82. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 2$.

    (a) Geben Sie f als Menge, also als Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ an.

    (b) Sei $X := [1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$. Berechnen Sie das Urbild $f^{-1}(X)$ und dessen Bild $f(f^{-1}(X))$.

    (c) Gilt für alle Mengen A, B, C mit $C \subseteq B$ und für alle Funktionen $f : A \to B$, dass $f(f^{-1}(C)) \subseteq C$?

    (d) Gilt für alle Mengen A, B, C mit $C \subseteq B$ und für alle Funktionen $f : A \to B$, dass $C \subseteq f(f^{-1}(C))$?

    Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort!

83. Zeigen Sie, dass für jede injektive Funktion $f : A \to B$ und für alle $C \subseteq A$ gilt, dass $f^{-1}(f(C)) \subseteq C$.

84. Zeigen Sie, dass für jede Funktion $f : A \to B$, die surjektiv auf B ist, und für alle $C \subseteq B$ gilt, dass $C \subseteq f(f^{-1}(C))$.

85. Welche der folgenden Funktionen f ist bijektiv von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antworten!

    (a) $f(x) = 1/(x-2)$ für $x \neq 2$, und $f(2) = 0$.

    (b) $f(x) = 1/(x-2)$ für $x \neq 2$, und $f(2) = 1$.

(c) $f(x) = x^3$.

(d) $f(x) = x^3 - x$.

Geben Sie die Umkehrfunktionen der bijektiven Funktionen an, am besten in der Form $f^{-1}(x) := \ldots$.

86. Geben Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ möglichst große Teilmengen $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ an, sodass die Einschränkung $f|_X : X \to Y$ bijektiv ist.

    (a) $f(x) = \sin(2x)$.

    (b) $f(x) = x^3 - x$.

    (c) $f(x) = 4$.

    (d) $f(x) = 2e^{x-3}$.

87. Berechnen Sie folgende Hintereinanderausführungen von Permutationen:

    (a) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$

    (b) $(12) \circ (23) \circ (34) \circ (45)$

    (c) $(54) \circ (43) \circ (32) \circ (21)$

    (d) $(123)(234)(345)(456)$

    (e) $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 4 & 6 & 1 & 7 & 3 \end{smallmatrix}\right)^{2020}$

88. Sei $F : S_m \to S_m$, $F(\sigma) := \sigma^{-1}$ für $\sigma \in S_m$. Zeigen Sie, dass F bijektiv ist.