Diskrete Mathematik (Wintersemester 2019)
ASB1MA1DMU, SeBMA01203
10. Übungsblatt für den 13.1.2020, 16.1.2020 und 17.1.2020

73. Zeigen Sie, dass es unendlich viele Primzahlen gibt.

    Hinweis: Gehen Sie analog zu Euklids Beweis vor. Nehmen Sie an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt, und führen Sie einen Widerspruchsbeweis. Beweisen Sie vorher:

    (a) Der kleinste positive Teiler einer von 1 verschiedenen natürlichen Zahl ist eine Primzahl.

    (b) Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $|a| \neq 1$ gilt: $a \mid b \Rightarrow a \nmid b + 1$

74. Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, usw. Seien $a, b, N \in \mathbb{N}$ mit $a = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i}$ und $b = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\beta_i}$. Zeigen Sie:

    (a) $\mathrm{ggT}(a, b) = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$.

    (b) $\mathrm{kgV}(a, b) = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$.

75. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Primfaktorenzerlegungen, dass

    (a) $\mathrm{kgV}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, b) = a \cdot b$.

    (b) $\mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a, b), c) = \mathrm{ggT}(a, \mathrm{ggT}(b, c))$.

    (c) $\mathrm{kgV}(\mathrm{ggT}(a, b), c) = \mathrm{ggT}(\mathrm{kgV}(a, c), \mathrm{kgV}(b, c))$.

    Hinweis: Beweisen Sie hilfreiche Zusammenhänge zwischen den Funktionen min und max mit Hilfe von Fallunterscheidungen.

76. Seien A, B Mengen, und sei f eine Funktion von A nach B. Seien $C, D \subseteq A$. Beweisen Sie:

    (a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$,

    (b) $f(C \cap D) \subseteq f(C) \cap f(D)$,

    (c) $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$, falls f injektiv ist.

77. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen, ob sie injektiv, surjektiv oder sogar bijektiv sind:

    (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$,

    (b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$,

    (c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

78. Sei $A = \{1, 2, 3\}$. Man finde jeweils eine Menge B und eine Funktion

    $$f : A \to B,$$

    sodass diese Funktion

    (a) injektiv ist, aber nicht surjektiv ist,

    (b) surjektiv ist, aber nicht injektiv ist,

    (c) bijektiv ist.

    (d) Finden Sie die Umkehrfunktion zu Ihrem Beispiel in (c).

    Stellen Sie die Funktion f durch ein Pfeildiagramm dar, und geben Sie die Funktion auch als Menge an.

79. Bestimmen Sie die Hintereinanderausführungen $f \circ g$ und $g \circ f$ der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 1$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + 2$. Gilt $f \circ g = g \circ f$?

80. Finden Sie Mengen A, B, C und $f : A \to B$, $g : B \to C$, sodass

    (a) g surjektiv und $g \circ f$ nicht surjektiv ist,

    (b) f injektiv und $g \circ f$ nicht injektiv ist,

    (c) $g \circ f$ surjektiv und f nicht surjektiv ist,

    (d) $g \circ f$ injektiv und g nicht injektiv ist.