

Diskrete Mathematik (Wintersemester 2017/18)

531.104, 531.105

7. Übungsblatt für den 30.11.2017 und 4.12.2017

48. Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei $F_m := 2^{2^m} + 1$ die m -te Fermat Zahl. Zeigen Sie, dass F_6 keine Primzahl ist. (*Hinweis: Prüfen Sie, dass 274177 ein Teiler von F_6 ist. Sie dürfen dazu auch technische Hilfsmittel (Taschenrechner oder Computer) verwenden.*)
49. Im Beispiel 47 wurden die Primzahlen der Form $2^n - 1$ betrachtet. Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen $n < 15$, sodass $2^n - 1$ tatsächlich eine Primzahl ist.
50. Seien $a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gekürzt, und die Nenner b und d teilerfremd sind, so ist auch der Bruch $\frac{ad+bc}{bd}$ gekürzt.
51. Sei p_n die n -te Primzahl, d. h. $p_1 = 2, p_2 = 3$, usw. Zeigen Sie

$$p_n \leq 2^{2^{n-1}}.$$

Hinweis: Euklids Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt beruht auf folgender Überlegung: Seien $q_1, q_2, \dots, q_n$ Primzahlen. Dann ist der kleinste positive Teiler von $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_n + 1$ eine Primzahl, die von allen q_i verschieden ist.

52. Welche Zahlen $q \in \mathbb{N}$ erfüllen folgende Eigenschaft?

Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $q \mid a \cdot b$ gilt $q \mid a$, oder es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $q \mid b^n$.

53. Sei p_n die n -te Primzahl, d. h. $p_1 = 2, p_2 = 3$, usw. Seien $a, N \in \mathbb{N}$ mit $a = \prod_{i=1}^N p_i^{\alpha_i}$. Betrachten wir nun die Primfaktorzerlegungen aller positiven ganzen Zahlen unter 100, d. h. $1 \leq a < 100$. Welche Zahl a hat die meisten Primfaktoren, nämlich wenn

- (a) dieselben Primfaktoren nur einmal aufzählt werden ($|\{i : \alpha_i > 0\}|$ ist maximal),

- (b) dieselben Primfaktoren mit Multiplizität aufzählt werden ($\sum_{i=1}^N \alpha_i$ ist maximal)?

Beispiele: Wenn $a = 28$: $N = 2$, $p_1 = 2$, $p_2 = 7$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 3$.
Wenn $a = 30$: $N = 3$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$,
 $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3$.

54. Sei p_n die n -te Primzahl, d. h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, usw. Seien $a, b, N \in \mathbb{N}$ mit $a = \prod_{i=1}^N p_i^{\alpha_i}$ und $b = \prod_{i=1}^N p_i^{\beta_i}$. Zeigen Sie:

(a) $\text{ggT}(a, b) = \prod_{i=1}^N p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$.

(b) $\text{kgV}(a, b) = \prod_{i=1}^N p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$.

Folgern Sie daraus, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $\text{kgV}(a, b) \cdot \text{ggT}(a, b) = a \cdot b$.

55. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\text{kgV}(\text{kgV}(a, b), c) = \text{kgV}(a, \text{kgV}(b, c)).$$