Diskrete Mathematik (Wintersemester 2017/18)
531.104, 531.105
7. Übungsblatt für den 30.11.2017 und 4.12.2017

48. Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei $F_m := 2^{2^m} + 1$ die m-te Fermat Zahl. Zeigen Sie, dass F_6 keine Primzahl ist. (*Hinweis: Prüfen Sie, dass* 274177 *ein Teiler von* F_6 *ist. Sie dürfen dazu auch technische Hilfsmittel (Taschenrechner oder Computer) verwenden.*)

49. Im Beispiel 47. wurden die Primzahlen der Form $2^n - 1$ betrachtet. Bestimmen Sie alle positiven ganzen Zahlen $n < 15$, sodass $2^n - 1$ tatsächlich eine Primzahl sei.

50. Seien $a, c \in \mathbb{Z}, b, d \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn die Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ gekürzt, und die Nenner b und d teilerfremd sind, so ist auch der Bruch $\frac{ad+bc}{bd}$ gekürzt.

51. Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, usw. Zeigen Sie
$$p_n \leq 2^{2^{n-1}}.$$
Hinweis: Euklids Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt beruht auf folgender Überlegung: Seien $q_1, q_2, \ldots, q_n$ Primzahlen. Dann ist der kleinste positive Teiler von $q_1 \cdot q_2 \cdots q_n + 1$ eine Primzahl, die von allen q_i verschieden ist.

52. Welche Zahlen $q \in \mathbb{N}$ erfüllen folgende Eigenschaft?

    Für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $q \mid a \cdot b$ gilt $q \mid a$ oder es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $q \mid b^n$.

53. Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, usw. Seien $a, N \in \mathbb{N}$ mit $a = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i}$. Betrachten wir nun die Primfaktorzerlegungen aller positiven ganzen Zahlen unter 100, d. h. $1 \leq a < 100$. Welche Zahl a hat die meisten Primfaktoren, nämlich wenn

    (a) dieselben Primfaktoren nur einmal aufzählt werden ($|\{i \in \mathbb{N} : \alpha_i > 0\}|$ ist maximal),

(b) dieselben Primfaktoren mit Multiplizität aufzählt werden ($\sum_{i=1}^{N} \alpha_i$ ist maximal)?

Beispiele: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$. Wenn $a = 28$: $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = 1$, $|\{i \in \mathbb{N} : \alpha_i > 0\}| = |\{1, 4\}| = 2$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 3$. Wenn $a = 30$: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$, $|\{i \in \mathbb{N} : \alpha_i > 0\}| = |\{1, 2, 3\}| = 3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3$.

54. Sei p_n die n-te Primzahl, d. h. $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, usw. Seien $a, b, N \in \mathbb{N}$ mit $a = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\alpha_i}$ und $b = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\beta_i}$. Zeigen Sie:

   (a) $\mathrm{ggT}(a, b) = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}$.

   (b) $\mathrm{kgV}(a, b) = \prod_{i=1}^{N} p_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)}$.

   Folgern Sie daraus, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{kgV}(a, b) \cdot \mathrm{ggT}(a, b) = a \cdot b$.

55. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(a, b), c) = \mathrm{kgV}(a, \mathrm{kgV}(b, c)).$$