Diskrete Mathematik (Wintersemester 2017/18)
531.104, 531.105
6. Übungsblatt für den 23.11.2017 und 27.11.2017

40. Für $m \in \mathbb{N}_0$ sei $F_m := 2^{2^m} + 1$ die m-te Fermat Zahl. Zeigen Sie durch Induktion, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\prod_{i=0}^{m-1} F_i = F_m - 2.$$

41. Bestimmen Sie für a und b jeweils $\mathrm{ggT}(a, n)$, und zwei ganze Zahlen $u, v \in \mathbb{Z}$, sodass
$$\mathrm{ggT}(a, b) = u \cdot a + v \cdot b.$$
   (a) $a = 254$, $b = 120$.
   (b) $a = 71$, $b = 79$.
   (c) $a = 610$, $b = 987$.

42. Seien $a, b, x \in \mathbb{N}$ und $u, v \in \mathbb{Z}$ so, dass
$$x = ua + vb.$$
Zeigen Sie: Wenn x sowohl ein Teiler von a als auch von b ist, so gilt $x = \mathrm{ggT}(a, b)$.

43. Seien $a, b \in \mathbb{N}$, $y \in \mathbb{Z}$ so, dass $a|y$, $b|y$ und $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$. Zeigen Sie (ohne Primfaktorenzerlegung): $a \cdot b|y$.

44. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ (nicht beide 0), und sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie
$$\mathrm{ggT}(ka, kb) = k \cdot \mathrm{ggT}(a, b)$$
indem Sie $\mathrm{ggT}(ka, kb)|k \cdot \mathrm{ggT}(a, b)$ und $k \cdot \mathrm{ggT}(a, b)|\mathrm{ggT}(ka, kb)$ begründen.

45. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ so, dass $a|b$. Zeigen Sie $\mathrm{ggT}(a, c)|\mathrm{ggT}(b, c)$ und $\mathrm{kgV}(a, c)|\mathrm{kgV}(b, c)$.

46. Sei $q > 1$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie durch Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

47. Sei $a, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie, falls $a^n - 1$ eine Primzahl ist, dann ist $a = 2$ und n eine Primzahl. (*Hinweis: Verwenden Sie die Formel aus dem letzten Beispiel.*)