Diskrete Mathematik (Wintersemester 2017/18)
531.104, 531.105
5. Übungsblatt für den 16.11.2017 und 20.11.2017

Wir untersuchen in den ersten beiden Beispielen die auf Peano zurückgehende Definition der Addition: Für jedes $m \in \mathbb{N}_0$ definieren wir eine Funktion $a_m : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ rekursiv durch $a_m(0) := m$ und

$$a_m(x^+) := (a_m(x))^+. \tag{1}$$

Darauf aufbauend definieren wir $x + y := a_x(y)$ für $x, y \in \mathbb{N}_0$.

32. Wir benützen diese rekursive Definition, um $0^{++} + 0^{+++}$ zu berechnen. Dabei sparen wir Klammern, indem wir etwa für $((x^+)^+)^+$ einfacher x^{+++} schreiben. Vervollständigen Sie dazu die folgende Berechnung und die angeführten Begründungen!

$$\begin{array}{rll}
 & 0^{++} + 0^{+++} & \\
= & a_{0^{++}}(0^{+++}) & \text{wegen Definition von } x+y \text{ mit } x = 0^{++} \text{ und } y = 0^{+++} \\
= & \big(a_{0^{++}}(0^{++})\big)^+ & \text{wegen Gleichung (1) mit } m = 0^{++},\ x = \underline{\qquad} \\
= & \big(a_{0^{++}}(0^{+})\big)^{++} & \text{wegen Gleichung (1) mit } m = \underline{\qquad},\ x = \underline{\qquad} \\
= & \big(a_{0^{++}}(\underline{\qquad})\big)^{+++} & \text{wegen } \underline{\qquad} \text{ mit } m = \underline{\qquad},\ x = \underline{\qquad} \\
= & (0^{++})^{+++} & \text{wegen } \underline{\qquad\qquad\qquad} \\
= & 0\underline{\qquad}. &
\end{array}$$

Welche Addition haben wir dadurch ausgerechnet?

33. Wir beweisen nun die Assoziativität der Addition, also dass für alle $x, y, z \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $(x + y) + z = x + (y + z)$. Wir zeigen dazu, dass die Menge

$$S := \{z \in \mathbb{N}_0 \mid \forall x \in \mathbb{N}_0\, \forall y \in \mathbb{N}_0 : (x + y) + z = x + (y + z)\}$$

die Eigenschaften

(I) $0 \in S$ und

(II) $\forall z \in \mathbb{N}_0 \ : \ z \in S \Rightarrow z^+ \in S$

erfüllt.

(a) Verwenden Sie die Definition der Addition, um $(x+y)+0$ und $x+(y+0)$ zu berechnen, und schließen Sie daraus $0 \in S$.

(b) Zeigen Sie $\forall z \in \mathbb{N}_0 : z \in S \Rightarrow z^+ \in S$ in folgender Weise: Sei $z \in \mathbb{N}_0$. Wir nehmen an, dass $z \in S$ gilt. Das bedeutet, dass

$$\forall \underline{\qquad} \forall \underline{\qquad} : \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Wir wollen zeigen, dass $z^+ \in S$ gilt. Dazu ist zu zeigen, dass

$$\forall \underline{\qquad} \forall \underline{\qquad} : \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}. \tag{2}$$

Um $\underline{\qquad\qquad}$ zu beweisen, fixieren wir $x, y \in \mathbb{N}_0$.
Wegen $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$ gilt dann

$$(x+y)+(z^+) = \big((x+y)+z\big)^+.$$

Da $z \in S$, gilt $(x+y)+z = \underline{\qquad\qquad}$ und somit $\big((x+y)+z\big)^+ = \underline{\qquad\qquad}$. Nun verwenden wir die Definition von $+$ und erhalten

$$\underline{\qquad\qquad} = \big(a_x(y+z)\big)^+ = \big(a_x(a_y(z))\big)^+.$$

Wegen der Definition von a_x und a_y gilt

$$\big(a_x(a_y(z))\big)^+ = \underline{\qquad\qquad\qquad} = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

Wir ersetzen $a_u(v)$ wieder durch $u+v$ und erhalten insgesamt, dass

$$(x+y)+(z^+) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

Somit gilt $\underline{\qquad\qquad} \in S$.
Da die Menge S die Eigenschaften $\underline{\qquad\qquad\qquad}$ und $\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$ erfüllt, gilt also $S = \underline{\qquad\qquad}$. Somit gilt für alle $x, y, z \in \mathbb{N}_0$, dass

$$\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}.$$

In den folgenden Beispielen gehen wir wieder davon aus, dass wir die Grundrechnungsarten und ihre Eigenschaften kennen.

34. Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist $n!$ definiert durch $0! = 1$ und $(n+1)! = n! \cdot (n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Vervollständigen Sie den folgenden Induktionsbeweis dafür, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $n! \geq 2^{n-1}$.

    Wir beweisen durch vollständige Induktion, dass

    $$\forall n \in \mathbb{N} : n! \geq 2^{n-1}$$

    gilt. Sei $A(n)$ die Aussageform $n! \geq 2^{n-1}$.

    Induktionsanfang: Wir zeigen $A(1)$: ____.

    Induktionsschritt: Wir zeigen

    $$\forall n \in \mathbb{N} : A(n) \Rightarrow A(n+1).$$

    Sei dazu $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen nun an, dass $A(n)$ gilt, also dass

    $$n! \geq 2^{n-1}.$$

    Das ist die *Induktionsannahme.* Die *Induktionsbehauptung* ist, dass $A(n+1)$ gilt, also dass

    $$(n+1)! \geq \underline{\hspace{6em}}.$$

    Um die Induktionsbehauptung zu zeigen, berechnen wir

    $$(n+1)! = n! \cdot (n+1).$$

    Wegen ____________________ gilt

    $$n! \cdot (n+1) \geq \underline{\hspace{6em}}.$$

    Es gilt daher insgesamt _______________ $\geq 2^{n-1} \cdot (n+1) \geq$ __________ $\cdot\, 2 \geq$ ____________________. Folglich gilt die Induktionsbehauptung.

    Somit ist der Induktionsbeweis gelungen; es gilt also

    $$\underline{\hspace{12em}}.$$

35. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, dass $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Gehen Sie dazu so vor:

(a) Geben Sie eine Aussageform $A(n)$ an, sodass die zu beweisende Aussage die Form $\forall n \in \mathbb{N}_0 : A(n)$ hat.

(b) Strukturieren Sie Ihren Induktionsbeweis genauso wie den Beweis aus Beispiel 34.

(c) An einer Stelle müssen Sie verwenden, dass $1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$ gilt. Warum gilt das?

36. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2.$$

37. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $a \neq b$. Zeigen Sie

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists q \in \mathbb{Z} \,:\, a^n - b^n = q \cdot (a-b)$$

durch vollständige Induktion.

(a) Geben Sie dazu zuerst eine Aussageform $A(n)$ an, für die Sie $\forall n \in \mathbb{N} : A(n)$ beweisen wollen!

(b) Benützen Sie den Hinweis

$$a^{n+1} - b^{n+1} = a(a^n - b^n) + b^n(a-b).$$

Die hier bewiesene Aussage sagt also, dass es ein $q(2)$ mit $a^2 - b^2 = q(2) \cdot (a-b)$, ein $q(3)$ mit $a^3 - b^3 = q(3) \cdot (a-b)$, … gibt. Können Sie aus Ihrem Induktionsbeweis eine Rekursion für $q(n)$ gewinnen, also eine Aussage der Form „für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $q(n+1) = F(q(n), a, b, n)$“?

In den folgenden beiden Beispielen beweisen wir einige grundlegende Eigenschaften der Teilbarkeitsrelation. Zeigen Sie in den folgenden Beispielen jeweils, dass die angeführte Implikation für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gilt.

38. (a) $(x \mid y$ und $x \mid z) \Rightarrow x \mid (y+z)$.

(b) $x \mid y \Rightarrow x \mid zy$.

(c) $(x \mid y$ und $y \mid z) \Rightarrow x \mid z$.

39. (a) $(x \mid y \text{ und } y \mid x) \Rightarrow (x = y \text{ oder } x = -y)$.

 (b) $(x \mid y \text{ und } z \mid x \text{ und } z \mid y \text{ und } z \neq 0) \Rightarrow \frac{x}{z} \mid \frac{y}{z}$.

 (c) $x \mid y \Rightarrow zx \mid zy$.