Diskrete Mathematik (Wintersemester 2017/18)
531.104, 531.105
3. Übungsblatt für den 19.10.2017 und 23.10.2017

16. Schreiben Sie folgende Sätze so um, dass sie die Form „für alle $x \in \ldots$ gilt: $A(x) \Rightarrow B(x)$“ haben.
    (a) Wenn x eine reelle Zahl ist, so ist $x^2 \geq 0$.
    (b) Wenn n kein Vielfaches von 3 ist, so hat n^2 bei Division durch 3 Rest 1. *Hinweis:* $B(x)$ ist dann “x hat bei Division durch 3 Rest 1.”

17. Schreiben Sie folgende Sätze so um, dass sie die Form „für alle $x \in \ldots$ gilt: $A(x) \Rightarrow B(x)$“ haben.
    (a) Die Wurzel einer natürlichen Zahl ist eine natürliche Zahl oder irrational. (Für eine reelle Zahl x sei $A(x)$ die Eigenschaft, dass x Wurzel einer natürlichen Zahl ist, $N(x)$ die Eigenschaft, dass x natürlich und $R(x)$ die Eigenschaft, dass x rational ist.)
    (b) Ein Quadrat ist auch ein Rechteck.

18. Bestimmen Sie jeweils den Wahrheitswert folgender Aussagen.
    (a) $\forall x \in \mathbb{N} : 2 \mid x^2 \Rightarrow 2 \mid x$.
    (b) $\forall x \in \mathbb{N} : 4 \mid x^2 \Rightarrow 4 \mid x$.
    (c) $\exists x \in \mathbb{N} : 4 \mid x^2 \wedge 4 \mid x$.
    (d) $\exists x \in \mathbb{N} : 4 \mid x^2 \wedge (\neg(4 \mid x))$.

19. Beweisen Sie folgende Aussagen:
    (a) $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists z \in \mathbb{N} : x \leq z^2 \wedge z^2 \leq x + 3\sqrt{x}$.
    (b) $\forall x, y \in \mathbb{N} : x \cdot y = 7 \Rightarrow (x = 1 \vee y = 1)$.
    (c) $\forall x, y \in \mathbb{N} : 2 \mid x \cdot y \Rightarrow (2 \mid x \vee 2 \mid y)$.

    Was bedeutet jede dieser Aussagen?

20. Wir betrachten Aussageformen über den reellen Zahlen.
    (a) Finden Sie eine Aussageform $B(y)$, die zur Aussageform
    $$\exists x \in \mathbb{R} : y + x^2 = 3$$
    äquivalent ist, aber keinen Quantor enthält.

(b) Finden Sie eine Aussageform $B(y, z)$, die zur Aussageform

$$\exists x \in \mathbb{R} \, : \, (x + 2z = 0 \text{ und } x - 3y = 0)$$

äquivalent ist, aber keine Quantoren enthält.

21. Wir betrachten Aussageformen über den reellen Zahlen.

(a) Finden Sie eine Aussageform $B(y)$, die zur Aussageform

$$\exists x \in \mathbb{R} : (x + y = 5 \text{ und } x - 3y = -7)$$

äquivalent ist, aber keine Quantoren enthält.

(b) Finden Sie eine Aussageform $B(y)$, die zur Aussageform

$$(\exists z \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(x \cdot (y - 3) = z)$$

äquivalent ist, aber keine Quantoren enthält.

22. Zeigen Sie: Wenn Y nicht leer ist, und $(\forall y \in Y)\,(C(y))$ gilt, so gilt auch $(\exists y \in Y)\,(C(y))$.

23. Zeigen Sie, dass die Aussagen p und q nicht äquivalent sein müssen, indem Sie konkrete Aussageformen finden, sodass p und q nicht äquivalent sind.

(a) $p = (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, A(x, y)$, $q = (\exists y \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})\, A(x, y)$. *Hinweis*: Versuchen Sie für $A(x, y)$ eine Gleichung in x und y.

(b) $p = (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, A(x, y)$, $q = (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\, A(x, y)$.