

Diskrete Mathematik (Wintersemester 2017/18)
531.104, 531.105
1. Übungsblatt für den 5.10.2017 und 9.10.2017

Die Beispiele werden gemeinsam in der ersten Übungseinheit erarbeitet. Sie brauchen diese Beispiele diesmal nicht vor der Übungseinheit vorzubereiten, dürfen das aber gerne tun!

In diesem Übungsblatt geht es darum, auf einige Fragestellungen der Logik aufmerksam zu machen. Das Blatt verwendet daher einige Begriffe (*notwendig*, *hinreichend*, ...), die erst im Verlauf der Vorlesung völlig geklärt werden. Wenn Sie alle Beispiele lösen können, dann ist das wunderbar! Freuen Sie sich auf die Vorlesung, denn Sie werden dort Techniken lernen, logische Zusammenhänge nicht nur selbst zu verstehen, sondern auch zu vermitteln. Wenn Sie nicht alle Beispiele lösen können, freuen Sie sich auch auf die Vorlesung, da dort gezeigt wird, wie man logische Zusammenhänge einfach und klar ausdrücken kann. Die Beispiele dieses Blatts stammen größtenteils aus [BT09].

1. (Verschiedene Interpretationen natürlicher Sprache) Eine Familie hat vier Kinder, zwei Söhne und zwei Töchter, die alle verschieden groß sind. Wir vergleichen nun die Körpergröße der Kinder. Der Satz

„Die Brüder sind größer als ihre Schwestern.“

kann einige mögliche Bedeutungen haben, darunter zum Beispiel:

- (a) Der größere Sohn ist größer als die größere der beiden Schwestern.
- (b) Jeder Sohn ist größer als alle Schwestern.
- (c) Jede Tochter ist kleiner als zumindest einer ihrer Brüder.
- (d) Im Mittel sind die Brüder größer als die Schwestern.

Zwischen diesen vier Interpretationen gibt es einige Zusammenhänge:

Wenn (b) gilt, so gilt auch (a). (*Begründung:* Wir nehmen an, dass (b) gilt. Dann ist jeder Sohn größer als alle Schwestern, also ist auch der größere Sohn größer als alle Schwestern, und somit größer als die größere der beiden Schwestern.) Wenn (a) gilt, so muss deswegen (b) nicht gelten. (*Gegenbeispiel:* Söhne 170cm und 160cm, Töchter 165cm und 150cm.)

Finden Sie für jede der folgenden Behauptungen heraus, ob sie stets gilt oder ein Gegenbeispiel zulässt, und geben Sie eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

Wenn (a), dann (b); wenn (a), dann (c); wenn (a), dann (d);
 wenn (b), dann (a); wenn (b), dann (c); wenn (b), dann (d);
 wenn (c), dann (a); wenn (c), dann (b); wenn (c), dann (d);
 wenn (d), dann (a); wenn (d), dann (b); wenn (d), dann (c).

2. Wir betrachten folgende Eigenschaften eines Vierecks V .

- (a) V hat mindestens einen stumpfen Winkel.
- (b) V hat mindestens drei spitze Winkel.
- (c) V hat keinen rechten Winkel.

Die Behauptung „wenn (c), dann (a)“ gilt immer, da ein Viereck Winkelsumme 360° hat und somit zumindest ein Winkel mindestens 90° sein muss. Da kein Winkel genau 90° hat, muss dieser Winkel stumpf sein.

Die Behauptung „wenn (a), dann (c)“ gilt nicht für jedes Viereck, da es ein Viereck gibt, das sowohl einen stumpfen als auch einen rechten Winkel besitzt. Zeichnen Sie ein solches Viereck, und finden Sie heraus, welcher der Zusammenhänge

wenn (a), dann (b); wenn (a), dann (c); wenn (b), dann (a);
 wenn (b), dann (c); wenn (c), dann (a); wenn (c), dann (b)

für jedes Viereck gilt, und geben Sie jeweils eine Begründung oder ein Gegenbeispiel an.

3. Sei D ein Dreieck. Welche der folgenden fünf Bedingungen sind hinreichend dafür, dass D gleichschenkelig ist?

- (a) D ist gleichseitig.
- (b) D hat zwei gleiche Winkel.
- (c) D ist rechtwinkelig.
- (d) D hat zwei gleiche Winkel, die beide kleiner als 60° sind.
- (e) D besitzt zwei Seiten, für die der Quotient ihrer Längen ganzzahlig ist.

Finden Sie für die Bedingungen, die hinreichend für die Gleichschenkeligkeit des Dreiecks sind, eine Begründung für die Aussage

„Jedes Dreieck mit der Bedingung ... ist gleichschenkelig“,

und finden Sie für die Bedingungen, die nicht hinreichend für die Gleichschenkeligkeit des Dreiecks sind, ein Dreieck D , das die Bedingung erfüllt, aber nicht gleichschenkelig ist.

4. Sei D ein Dreieck. Welche der folgenden fünf Bedingungen sind notwendig dafür, dass D gleichschenkelig ist?

- (a) D ist gleichseitig.
- (b) D hat zwei gleiche Winkel.
- (c) D ist rechtwinkelig.
- (d) D hat zwei gleiche Winkel, die beide kleiner als 60° sind.
- (e) D besitzt zwei Seiten, für die der Quotient ihrer Längen ganzzahlig ist.

Finden Sie für die Bedingungen, die notwendig für die Gleichschenkeligkeit des Dreiecks sind, eine Begründung für die Aussage

„Jedes gleichschenkelige Dreieck erfüllt die Bedingung ...“,

und finden Sie für die Bedingungen, die nicht notwendig für die Gleichschenkeligkeit des Dreiecks sind, ein Dreieck D , das gleichschenkelig ist und die Bedingung nicht erfüllt.

5. Finden Sie die Negation folgender Aussagen, und geben Sie diese Negation in möglichst einfachen Worten wieder.

- (a) Er ist reich und schön.
- (b) Alle Männer tragen Hüte.
- (c) Alle Männer tragen Hüte und Badeschlapfen.
- (d) Alle Männer tragen Hüte oder Badeschlapfen.
- (e) Alle $x, y \in \mathbb{R}$, die die Gleichung $x + y = z$ erfüllen, erfüllen auch die Gleichung $x^3 + y^3 = z$. *Hinweis:* Das stimmt für manche z , für andere nicht. Hier geht es nicht darum, diese z zu bestimmen, sondern darum, die Negation zu finden.
- (f) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $xy + 3x = 0$ und $x^3y + 3x^3 + xy - y + 2 = 0$ gilt auch $y = 2$ oder $y = -3$.

6. Sei V ein Viereck. Von den Bedingungen

- (a) V hat drei gleichlange Seiten
- (b) V hat zwei verschieden lange Seiten
- (c) V hat drei gleiche Winkel

ist keine hinreichend für eine der anderen Bedingungen. Zeigen Sie das, indem Sie jeweils ein Viereck zeichnen, das

- [i] (a) erfüllt und (b) nicht erfüllt.
 - [ii] (a) erfüllt und (c) nicht erfüllt.
 - [iii] (b) erfüllt und (a) nicht erfüllt.
 - [iv] (b) erfüllt und (c) nicht erfüllt.
 - [v] (c) erfüllt und (a) nicht erfüllt.
 - [vi] (c) erfüllt und (b) nicht erfüllt.
7. Finden Sie die Negation der folgenden Behauptungen, und geben Sie diese möglichst einfach wieder.
- (a) Es gibt einen Punkt, der weder auf p noch auf q liegt.
 - (b) Für jede reelle Zahl x gilt $f(x) \geq 5$.
 - (c) Es gibt einen Kreis, der die Geraden p und q berührt, aber die Gerade r nicht.
 - (d) Die Gleichung $(*)$ hat genau drei Lösungen.

Literatur

- [BT09] BRAMANTI, M. und G. TRAVAGLINI: *Matematica. Questione di metodo*. Zanichelli, Bologna, 2009.